

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ
ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΣΑΜΟΣ

ΔΙΔΑΣΚΩΝ

ΧΑΛΙΔΙΑΣ ΝΙΚΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι. ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Το αντικείμενο του μαθήματος είναι η επίλυση συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Θα δούμε διάφορες μορφές διαφορικών εξισώσεων, για τις οποίες θα μάθουμε συγκεκριμένους τρόπους για την επίλυση τους. Η δυσκολία είναι κάθε φορά στο να αναγνωρίζουμε ποιά μορφή έχουμε μπροστά μας, για να ξεκινήσουμε την ανάλογη διαδικασία.

Βέβαια, είναι αρκετά δύσκολο κανείς να θυμάται όλες τις μορφές αλλά και τις διαδικασίες επίλυσής τους, αλλά σε πρώτη φάση είναι αναγκαίο απλά να καταλάβει τις διαδικασίες και να τις πραγματοποιήσει τουλάχιστο μια φορά σε δοσμένες ασκήσεις.

Μια συνήθης διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης περιγράφεται ως εξής:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad (1)$$

όπου f μια δοθείσα συνάρτηση δύο μεταβλητών. Κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση $y = \phi(t)$, που ικανοποιεί την εξίσωση αυτή για όλα τα t σε κάποιο διάστημα, καλείται λύση. Δυστυχώς, σε αυτή την μορφή δεν υπάρχει εν γένει κάποιος τρόπος επίλυσης της διαφορικής εξίσωσης. Θα μελετήσουμε την εξίσωση αυτή για συγκεκριμένες f .

Η εξίσωση (1) μαζί με την:

$$y(x_0) = y_0, \quad (2)$$

όπου $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, ορίζουν, όπως λέμε, ένα πρόβλημα αρχικών τιμών.

1 ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Αν η συνάρτηση f στην εξίσωση (1) εξαρτάται γραμμικώς από την εξαρτημένη μεταβλητή y , τότε η εξίσωση μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t), \quad (3)$$

και λέγεται γραμμική εξίσωση πρώτης τάξης. Υποθέτουμε ότι οι p, g είναι δοθείσες συνεχείς συναρτήσεις σε κάποιο διάστημα $a < t < b$. Για παράδειγμα η διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}y = \frac{3}{2},$$

είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης με $p(t) = \frac{1}{2}, g(t) = \frac{3}{2}$.

Θα προχωρήσουμε λοιπόν στο να βρούμε μια διαδικασία επίλυσης της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης, δηλ. της εξίσωσης (3).

Παρατηρήστε κατ'αρχήν, το εξής: αν $p(t) = 0$ τότε πολύ εύκολα λύνουμε την εξίσωση (3) ολοκληρώνοντας κατά μέλη. Έχουμε δηλαδή,

$$\int \frac{dy}{dt} dt = \int g(t) dt \Rightarrow$$

$$y(t) = \int g(t) dt.$$

Άρα, είναι λογικό να σκεφτεί κανείς πως και στην γενική περίπτωση που το $p(t) \neq 0$ θα υπάρχει ενδεχομένως κάποιος τρόπος, έτσι ώστε να καταλήξω σε μια λύση της (3) ολοκληρώνοντας μια ποσότητα.

Αυτό πράγματι γίνεται, αρκεί όμως να γράψουμε το αριστερό μέλος της (3) σαν την παράγωγο μιας συνάρτησης και τότε, όπως στην περίπτωση $p(t) = 0$, ολοκληρώνοντας καταλήγουμε σε μια λύση. Ας δούμε όμως πως θα καταφέρουμε να γράψουμε το αριστερό μέλος της (3) σαν την παράγωγο μιας συνάρτησης.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια $\mu(t) \neq 0$ τέτοια ώστε,

$$(\mu(t)y(t))' = \mu(t) \frac{dy}{dt} + \mu(t)p(t)y(t). \quad (4)$$

Αν μπορώ να βρώ μια τέτοια μ τότε πολλαπλασιάζω την (3) με αυτή και θα αντικαταστήσω το αριστερό μέλος της (3) με την ποσότητα $(\mu(t)y(t))'$. Έπειτα θα ολοκληρώσω κατά μέλη και τέλος θα λύσω ως προς y .

Ας δούμε όμως αν υπάρχει μια τέτοια μ που να ικανοποιεί την εξίσωση (4).

Η εξίσωση (4) γίνεται:

$$\begin{aligned} \mu'(t)y(t) + \mu(t)y'(t) &= \mu(t)y'(t) + \mu(t)p(t)y(t) \Rightarrow \\ \mu'(t)y(t) &= \mu(t)p(t)y(t) \Rightarrow \\ (\mu'(t) - \mu(t)p(t))y(t) &= 0. \end{aligned}$$

Αυτό θα πρέπει να ισχύει για κάθε γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης. Μην ξεχνάτε ότι η y είναι μια συνάρτηση που ικανοποιεί την γραμμική εξίσωση πρώτης τάξης. Για κάθε p, g δοθείσες συναρτήσεις παίρνουμε και μια διαφορετική γραμμική εξίσωση πρώτης τάξης και επομένως και μια διαφορετική λύση y . Θέλουμε λοιπόν η τελευταία σχέση να ισχύει για κάθε επιλογή p, g που θα μας δώσουν και επομένως και για την επιλογή $p(t) = 0, g(t) = e^t$, που μια προφανής λύση είναι η $y(t) = e^t \neq 0$ για $t \in \mathbb{R}$. Άρα για την τελευταία ισότητα θα πρέπει να πάρουμε την χειρότερη περίπτωση η οποία είναι ακριβώς η προηγούμενη, δηλ. $y(t) \neq 0$ για όλα τα t σε ένα διάστημα. Επομένως έχουμε:

$$\mu'(t) = \mu(t)p(t),$$

δηλ. διαιρέσαμε με $y(t) \neq 0$.

Η τελευταία εξίσωση είναι μια απλή διαφορική εξίσωση με άγνωστη συνάρτηση την μ . Λύνεται ως εξής:

$$\frac{\mu'(t)}{\mu(t)} = p(t) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\mu'(t)}{\mu(t)} dt &= \int p(t) dt \Rightarrow \\ \ln|\mu(t)| &= \int p(t) dt \Rightarrow \\ \mu(t) &= e^{\int p(t) dt},\end{aligned}$$

βγάλαμε το απόλυτο και πήραμε την θετική ποσότητα διότι τελικά είναι ισοδύναμο, αφού με την μ θα πολλαπλασιάσω την (3) κατά μέλη, οπότε το οποιοδήποτε πρόσημο διαγράφεται. Επίσης κατά την ολοκλήρωση θεωρήσαμε την σταθερά ίση με το μηδέν διότι ψάχνουμε απλά μια μ η οποία να μας κάνει την συγκεκριμένη δουλειά για την οποία την χρειαζόμαστε, άρα θέλουμε να είναι όσο πιο απλή γίνεται.

Καταλήξαμε λοιπόν σε μια μ με την οποία θα πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη την εξίσωση (3). Τότε αυτή γίνεται:

$$\begin{aligned}\mu(t) \frac{dy}{dt} + \mu(t)p(t)y &= \mu(t)g(t) \Rightarrow \\ (\mu(t)y(t))' &= \mu(t)g(t),\end{aligned}$$

λάβαμε υπόψη μας την εξίσωση (4) την οποία ικανοποιεί πια η μ .

Ολοκληρώνοντας κατά μέλη την τελευταία εξίσωση έχουμε:

$$\begin{aligned}\mu(t)y(t) &= \int \mu(t)g(t)dt + c \Rightarrow \\ y(t) &= \frac{\int \mu(t)g(t)dt + c}{\mu(t)},\end{aligned}$$

παρατηρήστε ότι μπορούμε να διαιρέσουμε με $\mu(t)$ διότι είναι διάφορη του μηδέν για όλα τα $t \in R$.

Καταλήξαμε λοιπόν στην λύση μιας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης. Παρατηρήστε ότι δεν έχουμε μόνο την διαδικασία εύρεσης λύσης αλλά και την ίδια την λύση σε κλειστή μορφή η οποία δίνεται από τον εξής τύπο:

$$y(t) = \frac{\int \mu(t)g(t)dt + c}{\mu(t)}. \quad (5)$$

Αυτός ο τύπος ισχύει για κάθε γραμμική εξίσωση πρώτης τάξης. Δυστυχώς, αυτό δεν συμβαίνει με όλες τις διαφορικές εξισώσεις που μπορεί να συναντήσει κάποιος ερευνητής για αυτό εμείς θα ήταν καλό να καταλάβουμε πλήρως την παραπάνω διαδικασία διότι δεν θα έχουμε την πολυτέλεια να έχουμε συχνά διαθέσιμες τέτοιες διαδικασίες σε άλλες μορφές.

Παρόλα αυτά μπορεί να αναρωτηθεί κανείς αν αυτή η διαδικασία που ακολουθήσαμε είναι η μοναδική και αν κατ' επέκταση μπορούμε να βρούμε και άλλες λύσεις, διαφορετικές από την (5), ακολουθώντας ενδεχομένως, διαφορετικές διαδικασίες. Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι, ότι είναι πολύ πιθανό κάποιος να

μπορεί να ακολουθήσει μια διαφορετική διαδικασία επίλυσης της (3). Όμως όσον αφορά το ερώτημα αν θα βρει και διαφορετική από την (5) λύση θα μας απαντήσει το παρακάτω θεώρημα (ύπαρξης και μοναδικότητας) το οποίο μιλά για την ύπαρξη λύσης και την μοναδικότητά της σε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών μιας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης.

Θεώρημα 1 Αν οι συναρτήσεις p, g είναι συνεχείς σε ένα διάστημα $I : a < t < b$ που περιέχει το σημείο $t = t_0$ τότε υπάρχει μοναδική συνάρτηση $y = \phi(t)$ που ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση:

$$y' + p(t)y = g(t) \quad (6)$$

για κάθε $t \in I$ καθώς επίσης και την αρχική συνθήκη

$$y(t_0) = y_0, \quad (7)$$

όπου y_0 μια αυθαίρετη αρχική τιμή.

Σημείωση 1 Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι το διάστημα που ορίζεται η λύση θα πρέπει να είναι ένα διάστημα της μορφής (a, b) που περιέχει το t_0 .

Σύμφωνα λοιπόν με το προηγούμενο θεώρημα, κάτω από τις προϋποθέσεις του, με όποια διαδικασία και αν καταλήξουμε σε κάποια λύση, αυτή θα είναι σίγουρα η λύση (5) με κατάλληλη επιλογή της σταθεράς.

Ας προχωρήσουμε σε ένα παράδειγμα για να δούμε στην πράξη τι ακριβώς συμβαίνει.

Παράδειγμα 1 Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} y' - \frac{1}{2}y &= e^{-t} \\ y(0) &= -1 \end{aligned}$$

Λύση:

Παρατηρούμε ότι $p(t) = -\frac{1}{2}, g(t) = e^{-t}$. Πριν προχωρήσουμε στο να υπολογίσουμε την λύση θα πρέπει να μιλήσουμε για την ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης και σε ποιο διάστημα. Βλέπουμε λοιπόν ότι p, g είναι συνεχείς σε όλο το R και ότι βέβαια το $x_0 = 0 \in R$. Άρα λοιπόν ικανοποιείται το θεώρημα 1 και υπάρχει μοναδική λύση η οποία ορίζεται σε οποιοδήποτε διάστημα (a, b) που περιέχει το 0. Γνωρίζοντας λοιπόν έναν τρόπο για να υπολογίζουμε μια λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης και έχοντας επιπλέον την πληροφορία ότι είναι μοναδική από το θεώρημα 1, είμαστε σίγουροι ότι υπολογίζουμε την μία και μοναδική και άρα δεν μας ενδιαφέρει ο τρόπος υπολογισμού. Ας την υπολογίσουμε λοιπόν.

Θα υπολογίσουμε το $\mu(t) = e^{\int p(t)dt} = e^{\int (-\frac{1}{2})dt} = e^{-\frac{t}{2}}$. Έπειτα θα πρέπει να υπολογίσουμε το εξής ολοκλήρωμα:

$$\int \mu(t)g(t)dt = \int e^{-\frac{t}{2}}e^{-t}dt = \int e^{-\frac{3}{2}t}dt = -\frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}t}.$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο (5) έχουμε λοιπόν την μορφή της γενικής λύσης η οποία είναι:

$$y(t) = \frac{-\frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}t} + c}{e^{-\frac{1}{2}t}} = -\frac{2}{3}e^{-t} + ce^{\frac{1}{2}t}$$

Τέλος για να υπολογίσουμε την συγκεκριμένη συνάρτηση έχουμε ότι

$$y(0) = -1 \Rightarrow -\frac{2}{3}e^{-0} + ce^{\frac{0}{2}} = -1 \Rightarrow c = -\frac{1}{3}.$$

Άρα η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι:

$$y(t) = -\frac{2}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{\frac{1}{2}t}.$$

Τέλος θα ασχοληθούμε με ένα ενδιαφέρον πρόβλημα για τα εφαρμοσμένα μαθηματικά. Για παράδειγμα τι γίνεται με την λύση αν αλλάξω λίγο την αρχική συνθήκη. Ας πάρουμε λοιπόν το αρχικό πρόβλημα αρχικών τιμών αλλά με ένα τυχαίο y_0 . Δηλ. θα μελετήσουμε την λύση του παρακάτω προβλήματος αρχικών τιμών:

$$\begin{aligned} y' - \frac{1}{2}y &= e^{-t} \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

Η γενική λύση όπως δείξαμε είναι: $y(t) = -\frac{2}{3}e^{-t} + ce^{\frac{1}{2}t}$. Για να ικανοποιηθεί λοιπόν η τυχαία αρχική συνθήκη πρέπει να διαλέξουμε $c = y_0 + \frac{2}{3}$. Άρα η ειδική λύση είναι $y(t) = -\frac{2}{3}e^{-t} + (y_0 + \frac{2}{3})e^{\frac{1}{2}t}$.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι ανάλογα με την εκλογή του y_0 η λύση που προκύπτει διαφέρει πάρα πολύ. Πιο συγκεκριμένα, διαλέξτε $y_0 = -\frac{2}{3}$. Εύκολα βλέπουμε ότι η αντίστοιχη λύση συγκλίνει στο 0 καθώς το t πηγαίνει στο $+\infty$. Έπειτα, διαλέξτε $y_0 > -\frac{2}{3}$ και τότε θα παρατηρήσετε εύκολα ότι η αντίστοιχη λύση πηγαίνει στο $+\infty$ όταν το $t \rightarrow +\infty$. Τέλος, αν $y_0 < -\frac{2}{3}$ βλέπουμε ότι $y(t) \rightarrow -\infty$ καθώς $t \rightarrow +\infty$.

Το συμπέρασμα είναι ότι η λύση διαφέρει πολύ, παρόλο που ικανοποιεί την ίδια διαφορική εξίσωση, όταν διαφέρει έστω και λίγο η αρχική συνθήκη.

◇

Τώρα θα προχωρήσουμε σε ένα άλλο πρόβλημα αρχικών τιμών, όπου θα δούμε καλύτερα την αξία του θεωρήματος 1.

Παράδειγμα 2 Να βρεθεί η λύση του παρακάτω προβλήματος αρχικών τιμών:

$$\begin{aligned} ty' + 2y &= 4t^2 \\ y(1) &= 2. \end{aligned}$$

Λύση

Κατ'αρχήν θα πρέπει να το φέρουμε στην τυπική μορφή της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης. Αυτή, δεν πρέπει να μας διαφεύγει, έχει συντελεστή

του y' την μονάδα, κάτι που δεν συμβαίνει εδώ. Άρα θα πρέπει να διαιρέσουμε με t , αφού πρώτα δηλώσουμε ότι από εδώ και στο εξής το $t \neq 0$. Έτσι λοιπόν το προηγούμενο πρόβλημα αρχικών τιμών γίνεται:

$$y' + \frac{2}{t}y = 4t, \quad t \neq 0$$

$$y(1) = 2.$$

Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, θα πρέπει να μιλήσουμε πρώτα για την ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης, δηλ. να επικαλεστούμε το Θεώρημα 1. Παρατηρούμε ότι $p(t) = \frac{2}{t}, g(t) = 4t$. Η δεύτερη είναι συνεχής παντού, δυστυχώς όμως η πρώτη συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο 0. Το Θεώρημα λοιπόν μας απαντά ότι υπάρχει μοναδική λύση σε ένα διάστημα που περιέχει το 1 και ταυτόχρονα οι p, g είναι συνεχείς. Το διάστημα αυτό είναι το ανοικτό $(0, +\infty)$. Τώρα έχουμε ανοικτό τον δρόμο να υπολογίσουμε με τον γνωστό τρόπο την $y(t)$ και εξαρχής να γνωρίζουμε το διάστημα στο οποίο ορίζεται.

Υπολογίζουμε πρώτα, ως γνωστόν, το $\mu = e^{\int p(t)dt} = e^{\int \frac{2}{t}dt} = e^{\ln t^2} = t^2$.

Μετά υπολογίζουμε το $\int \mu(t)g(t)dt = \int t^2 4t dt = t^4$. Οπότε η γενική λύση είναι:

$$y(t) = t^2 + \frac{c}{t^2}.$$

Μένει λοιπόν, από την γενική λύση, να υπολογίσουμε αυτή που ικανοποιεί και την αρχική συνθήκη. Δηλ. πρέπει να υπολογίσω την σταθερά c έτσι ώστε $y(1) = 2$. Πράγματι αυτή ικανοποιείται για $c = 1$. Επομένως η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι:

$$y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2}.$$

◇

Ας συνεχίσουμε με ένα ακόμη παράδειγμα.

Παράδειγμα 3 Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$ty' - 2y = -t^2$$

$$y(1) = 0.$$

Λύση:

Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα διαιρούμε με $t \neq 0$ και καταλήγουμε στην τυπική μορφή της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης. Δηλ.

$$y' - \frac{2}{t}y = -t$$

$$y(1) = 0.$$

Κάνοντας τον ίδιο συλλογισμό με το προηγούμενο παράδειγμα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι υπάρχει μοναδική λύση του προβλήματος αρχικών τιμών στο διάστημα $(0, +\infty)$. Επομένως αρχίζουμε την διαδικασία υπολογισμού της y .

Υπολογίζουμε πρώτα την $\mu(t) = e^{\int p(t)dt} = e^{-2 \int \frac{1}{t} dt} = e^{-2 \ln|t|} = t^{-2}$, βγάλαμε το απόλυτο διότι έχουμε ήδη δεχτεί ότι $t \in (0, +\infty)$. Συνεχίζουμε υπολογίζοντας το εξής ολοκλήρωμα: $\int \mu(t)g(t)dt = \int \frac{1}{t^2}(-t)dt = -\ln t$. Άρα $y(t) = -t^2 \ln t + ct^2$. Για να ικανοποιηθεί και η αρχική συνθήκη πρέπει να διαλέξουμε $c = 0$. Άρα η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι $y(t) = -t^2 \ln t$.

◇

Στις επόμενες δύο ενότητες θα ασχοληθούμε με δύο τύπους συνήθων διαφορικών εξισώσεων, που με κατάλληλο μετασχηματισμό ανάγονται σε μια γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης. Η πρώτη που θα μελετήσουμε εδώ είναι η λεγόμενη “Bernoulli”.

2 ΕΙΣΩΣΕΙΣ BERNOULLI

Οι διαφορικές εξισώσεις “Bernoulli” είναι της μορφής:

$$y' + a(t)y = b(t)y^r, \quad r \neq 0, 1. \quad (8)$$

Αν $r = 0$ ή $r = 1$ τότε είναι πολύ εύκολο να δεί κανείς ότι η παραπάνω διαφορική εξίσωση είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης. Όμως με έναν κατάλληλο μετασχηματισμό θα δείξουμε ότι στην πραγματικότητα για οποιοδήποτε r μετασχηματίζεται σε γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης.

Θέτουμε λοιπόν $z(t) = y^{1-r}(t)$. Υπολογίζουμε την παράγωγο του z και έχουμε $z'(t) = (1-r)y^{-r}y'$. Στην συνέχεια πολλαπλασιάζω με $(1-r)y^{-r}$ την εξίσωση (8) και παίρνω όπως εύκολα μπορεί να δεί κανείς την εξής γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης με άγνωστη συνάρτηση την z :

$$z' + (1-r)a(t)z = b(t)(1-r). \quad (9)$$

Όπως είναι προφανές αντικαταστήσαμε την ποσότητα $(1-r)y^{-r}y'$ με z' και την y^{1-r} με z . Η εξίσωση (9) είναι λοιπόν μια γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης για την οποία αναπτύξαμε στην προηγούμενη ενότητα μια διαδικασία εύρεσης της λύσης και μάλιστα καταλήξαμε σε έναν κλειστό τύπο για την λύση. Γνωρίζοντας λοιπόν την συνάρτηση z που ικανοποιεί την (9), αντιστρέφουμε τον μετασχηματισμό για να υπολογίσουμε την y η οποία θα είναι και η λύση της (8). Με λίγα λόγια $y(t) = z^{r-1}(t)$.

Ας συνεχίσουμε με ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 4 Να λυθεί το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$(t-2)y' + y = 7(t-2)^3 y^{\frac{1}{2}} \\ y(3) = 1.$$

Λύση: Μην ξεχνάτε ότι πριν αποφασίσουμε για τον τύπο της διαφορικής που αντιμετωπίζουμε πρώτα **Θα** πρέπει να σιγουρευτούμε ότι ο συντελεστής της παραγώγου της άγνωστης συνάρτησης είναι μονάδα. Διαιρούμε λοιπόν με $t - 2 \neq 0$ και παίρνω την παρακάτω διαφορική εξίσωση η οποία είναι εξίσωση “Bernoulli” με $r = \frac{1}{2}$:

$$y' + \frac{1}{t-2}y = 7(t-2)^2 y^{\frac{1}{2}}.$$

Θέτω λοιπόν $z = y^{\frac{1}{2}}$ και υπολογίζω την παράγωγο της z η οποία είναι $z' = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y'$. Βέβαια **Θα** πρέπει να προσέξουμε διότι στον μετασχηματισμό η y δεν επιτρέπεται να είναι αρνητική. Αυτό **Θα** πρέπει να το έχουμε υπόψη μας, διότι αργότερα μπορεί να καταλήξουμε σε δύο λύσεις και εκεί **Θα** πρέπει να αγνοήσουμε εκείνη η οποία είναι αρνητική για κάποια t . Συνεχίζουμε την διαδικασία λοιπόν πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση μας με την ποσότητα $\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y'$ και αντικαθιστώντας τις κατάλληλες ποσότητες έχουμε:

$$z' + \frac{1}{2(t-2)}z = \frac{7}{2}(t-2)^2.$$

Η διαφορική εξίσωση αυτή είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης, της οποίας η γενική λύση είναι:

$$z(t) = c(t-2)^{-\frac{1}{2}} + (t-2)^3.$$

Αντιστρέφοντας τώρα τον μετασχηματισμό, έχουμε $y(t) = (c(t-2)^{-\frac{1}{2}} + (t-2)^3)^2$. Για να υπολογίσουμε την συγκεκριμένη λύση που ικανοποιεί και την αρχική συνθήκη **Θα** πρέπει απλά να θέσουμε $c = 0$ ή $c = -2$ το οποίο προκύπτει εύκολα από την εξίσωση $y(3) = 1$ με άγνωστο το c .

Όπως **Θα** δείξουμε παρακάτω αυτό **Θα** είναι περίεργο, διότι η συγκεκριμένη διαφορική εξίσωση **Θα** έχει μοναδική λύση σε μια περιοχή του $(3, 1)$. Αυτό όμως συμβαίνει διότι στον μετασχηματισμό $z = \sqrt{y}$ μπορούμε να έχουμε δύο τιμές του z την αρνητική και την θετική (για παράδειγμα είναι γνωστό ότι $\sqrt{4} = \pm 2$). Σε αυτού του είδους τους μετασχηματισμούς λοιπόν (μη αμφιμονοσήμαντους) **Θα** πρέπει να δεσμευτούμε εξαρχής με το πρόσημο της σχέσης $z = \pm|\sqrt{y}|$. Αυτό όμως σημαίνει ότι η $z(t) = c(t-2)^{-\frac{1}{2}} + (t-2)^3$ **Θα** πρέπει να είναι θετική αν επιλέξουμε το θετικό πρόσημο στον μετασχηματισμό. Πράγματι αν προσπαθήσουμε να δούμε ποιά από τις δύο λύσεις ικανοποιεί το πρόβλημα **Θα** δούμε ότι για αυτή που αντιστοιχεί στην λύση με $c = 0$ ικανοποιείται χωρίς καμία δέσμευση, όμως η άλλη για $c = -2$ ικανοποιείται μόνο αν $t \geq 3.2$. Όμως τότε δεν ικανοποιεί την αρχική συνθήκη. Άρα επιλέγουμε την λύση με $c = 0$. Αυτό **Θα** μπορούσαμε να το δούμε εξ αρχής, επιλέγοντας την z να είναι αυτή με το θετικό πρόσημο στον μετασχηματισμό. **Θα** είχαμε σαν αποτέλεσμα ότι για $c = 0$ είναι θετική αλλά για $c = -2$ είναι θετική όταν $t \geq 3.2$ δηλ. πιο δεξιά από την αρχική συνθήκη. Άρα αγνοείται.

Το συμπέρασμα λοιπόν στην συγκεκριμένη άσκηση είναι ότι η λύση είναι η $y(t) = ((t-2)^3)^2$ η οποία όμως **Θα** ορίζεται στο διάστημα $(2 + \infty)$, διότι για τα υπόλοιπα t δεν μας εξασφαλίζεται η μοναδικότητα (δες ενότητα 8).

◇

Παρακάτω δίνουμε ένα ακόμη παράδειγμα.

Παράδειγμα 5 Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{aligned}y' - \frac{1}{t}y &= -\frac{1}{2y}, \\ y(-1) &= 2.\end{aligned}$$

Λύση:

Εδώ έχουμε μια “Bernoulli” με $r = -1$. Θέτουμε $z = y^2$. Να σημειώσουμε εδώ ότι αργότερα θα πρέπει να ορίσουμε το πεδίο ορισμού της z έτσι ώστε $z(t) \geq 0$. Πολλαπλασιάζοντας με $2y$ την διαφορική εξίσωση και αντικαθιστώντας έχουμε τελικά την εξής γραμμική διαφορική εξίσωση ως προς z :

$$z' - \frac{2}{t}z = -1$$

της οποίας η γενική λύση είναι $z(t) = ct^2 + t$. Αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό έχουμε $y(t) = \pm\sqrt{ct^2 + t}$. Αυτή στην πραγματικότητα είναι δύο λύσεις, η $y(t) = +|\sqrt{ct^2 + t}|$ και η $y(t) = -|\sqrt{ct^2 + t}|$ (η θετική και η αρνητική). Στο τέλος θα δεχτούμε την μία μόνο. Ας δούμε τι πρέπει να είναι η σταθερά c για να ικανοποιείται η αρχική συνθήκη. Κάνοντας υπολογισμούς είναι καθαρό ότι για $c = 5$ ικανοποιείται η αρχική συνθήκη. Αφού υπολογίσαμε την σταθερά θα πρέπει να γυρίσουμε πίσω στην $z(t)$ για να αποφασίσουμε για ποιά t ορίζεται (πρέπει $z(t) \geq 0$). Το αποτέλεσμα είναι ότι ορίζεται στο διάστημα $(-\infty, -\frac{1}{5})$. Τέλος θα πρέπει να διαλέξουμε μια από τις δύο λύσεις. Προφανώς θα διαλέξουμε την θετική, διότι μόνον αυτή ικανοποιεί την αρχική συνθήκη.

Άρα, η λύση είναι $y(t) = +|\sqrt{5t^2 + t}|$ και ορίζεται στο ανοιχτό διάστημα $(-\infty, -\frac{1}{5})$.

◇

3 ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ RICCATI

Θα λέμε μια διαφορική εξίσωση ότι είναι μια διαφορική εξίσωση “Riccati” αν μπορούμε να την φέρουμε στην μορφή:

$$y' + a(t)y + b(t)y^2 + d(t) = 0. \quad (10)$$

Βλέπουμε ότι αν $d(t) = 0$ τότε έχουμε στην πραγματικότητα μια “Bernoulli” με $r = 2$. Για να λυθεί μια τέτοια διαφορική εξίσωση θα πρέπει να γνωρίζουμε εκ των προτέρων μια ειδική λύση της. Ας την ονομάσουμε y_1 . Κάνοντας τον μετασχηματισμό $z(t) = \frac{1}{y - y_1}$ καταλήγουμε σε μια γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης (ας

σημειώσουμε εδώ ότι $z(t) \neq 0$. Πραγματικά, από αυτόν τον μετασχηματισμό έχω: $y = y_1 + \frac{1}{z}$ και $y' = y_1' - \frac{1}{z^2}z'$ και αντικαθιστώντας στην διαφορική εξίσωση έχουμε:

$$y_1' - \frac{1}{z^2}z' + a(t)(y_1 + \frac{1}{z}) + b(t)(y_1 + \frac{1}{z})^2 + d(t) = 0 \Rightarrow$$

$$\left(y_1' + a(t)y_1 + b(t)y_1^2 + d(t) \right) - \frac{1}{z^2}z' + a(t)\frac{1}{z} + 2b(t)y_1\frac{1}{z} + b(t)\frac{1}{z^2} = 0.$$

Στην τελευταία ισότητα, ο πρώτος όρος είναι μηδέν, γιατί η y_1 δεχθήκαμε ότι είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης. Από τους υπόλοιπους όρους βγάζουμε κοινό παράγοντα το $-\frac{1}{z^2}$ και καταλήγουμε, κάνοντας κάποιες πολύ εύκολες πράξεις, στην γραμμική διαφορική εξίσωση με άγνωστη συνάρτηση την z :

$$z' - (a(t) + 2b(t)y_1)z = b(t) \quad (11)$$

Όπως και στην προηγούμενη ενότητα, λύνουμε την γραμμική διαφορική εξίσωση και έπειτα αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό παίρνουμε την λύση της “Riccati”. Για να βρούμε βέβαια το πεδίο ορισμού της λύσης σε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών θα πρέπει να προσέξουμε και τον μετασχηματισμό, καθώς δεν θα πρέπει να μηδενίζεται η $z(t)$.

Δεν έχουμε παρά να περάσουμε σε κάποια παραδείγματα.

Παράδειγμα 6 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' = \frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} - y^2$$

αν γνωρίζουμε ότι μια μερική λύση είναι της μορφής $y_1(x) = \frac{a}{x}$ με $a \in \mathbb{R}$.

Λύση:

Η εξίσωση αυτή είναι μια Riccati. Θα πρέπει πρώτα να βρούμε μια ειδική λύση πριν κάνουμε τον γνωστό μετασχηματισμό. Γνωρίζουμε ότι μια τέτοια είναι της μορφής $y_1(x) = \frac{a}{x}$. Δεν μένει παρά να βρούμε το a έτσι ώστε η y_1 να ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση. Αντικαθιστώντας λοιπόν στην εξίσωση έχουμε:

$$-\frac{a}{x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{a}{x^2} - \frac{a^2}{x^2} \Rightarrow a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a = \pm 1.$$

Άρα μια ειδική λύση είναι η $y_1 = \frac{1}{x}$. Θεωρούμε τώρα τον μετασχηματισμό $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$ και υπολογίζουμε την παράγωγό της $y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{z^2}z'$. Αντικαθιστούμε στην εξίσωση και έχουμε

$$-\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{xz} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{z^2} - \frac{2}{xz} \Rightarrow$$

$$z' - \frac{3}{z}z = 1$$

Η λύση της γραμμικής είναι $z(x) = cx^3 - \frac{1}{2}x$. Άρα η γενική λύση της αρχικής διαφορικής εξίσωσης θα είναι: $y(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{cx^3 - \frac{1}{2}x}$.

◇

Σημείωση 2 Αν κάνουμε τον μετασχηματισμό $y(x) = y_1(x) + z(x)$ τότε καταλήγουμε σε μια εξίσωση “Bernoulli”.

Παράδειγμα 7 Να λυθεί η παρακάτω διαφορική εξίσωση:

$$y' = y^2 - (2x + 1)y + (x^2 + x + 1)$$

Λύση:

Παρατηρούμε ότι η $y_1(x) = x$ είναι μια ειδική λύση. Κάνουμε τον μετασχηματισμό $y(x) = y_1(x) + z(x)$ με $y' = 1 + z'$ και αντικαθιστώντας έχουμε:

$$1 + z' = (x + z)^2 - (2x + 1)(x + z) + (x^2 + x + 1) \Rightarrow$$

$$z' = z^2 - z.$$

Η τελευταία εξίσωση είναι μια “Bernoulli” με $r = 2$ με γενική λύση την $z(x) = \frac{e^{-x}}{e^{-x} + c}$. Η γενική λύση λοιπόν της αρχικής διαφορικής είναι $y(x) = x + \frac{e^{-x}}{e^{-x} + c}$.

◇

Σημείωση 3 Αν y_1, y_2 είναι δύο μερικές λύσεις της εξίσωσης τότε η γενική λύση είναι:

$$y(x) = \frac{y_1 - cy_2 e^{\int b(x)(y_1 - y_2) dx}}{1 - cy_2 e^{\int b(x)(y_1 - y_2) dx}}.$$

Παράδειγμα 8 Να λυθεί η παρακάτω διαφορική εξίσωση αν η ειδική λύση είναι της μορφής $y_1 = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}$:

$$x^4 y' + x^4 y^2 = 1.$$

Λύση:

Γράφουμε την εξίσωση στην μορφή:

$$y' + y^2 = \frac{1}{x^4}, x \neq 0.$$

Αντικαθιστώντας την y_1 στην εξίσωση καταλήγουμε μετά από τετριμένες πράξεις ότι, είτε $(a, b) = (1, -1)$ είτε $(a, b) = (1, 1)$. Άρα, έχουμε στην διάθεση μας δύο ειδικές λύσεις και επομένως μπορώ να γράψω την γενική λύση κατευθείαν ως εξής:

$$y(x) = \frac{(x + 1) - c(x - 1)e^{-\frac{2}{x}}}{x^2 - c(x - 1)e^{-\frac{2}{x}}}.$$

◇

4 ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΧΩΡΙΖΟΜΕΝΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Σε αυτή την ενότητα θα χρειαστούμε την έννοια του διαφορικού. Ας δώσουμε έναν ορισμό.

Ορισμός 1 Αν η συνάρτηση $y = f(x)$ έχει μια παράγωγο $f'(x)$ στο σημείο x και Dx μια οποιαδήποτε μη μηδενική αύξηση του x , τότε το διαφορικό ορίζεται με $dy = f'(x)Dx$.

Παρατηρούμε ότι αν $y = x$ τότε $(x)' = 1$, άρα $dx = Dx$. Επομένως, σύμφωνα με τον ορισμό, έχουμε ότι για οποιαδήποτε συνάρτηση $y = f(x)$ με παράγωγο στο x , $f'(x)$ ισχύει η σχέση $dy = f' dx$. Διαιρώντας λοιπόν με το dx ερχόμαστε σε συμφωνία με τον ορισμό της παραγώγου, με το επιπλέον κέρδος ότι μπορούμε να βλέπουμε το dy , dx σαν διαφορετικές ποσότητες και όχι σαν μέρος ενός συμβόλου. Εννοείται βέβαια, ότι το dy εξαρτάται από την τιμή του x αλλά και την αύξηση Dx .

Ας επιστρέψουμε τώρα στο αντικείμενό μας. Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε τις λεγόμενες διαχωρίσιμες διαφορικές εξισώσεις. Η γενική της μορφή είναι η εξής:

$$y' = A(x)B(y) \quad (12)$$

Από την μορφή της καταλαβαίνουμε αμέσως γιατί ονομάζονται διαχωρίσιμες διαφορικές εξισώσεις. Το δεξί μέλος γράφεται σαν γινόμενο δύο συναρτήσεων μιας μεταβλητής. Η πρώτη εξαρτάται από την μεταβλητή x και η δεύτερη από την εξαρτημένη μεταβλητή y . Αυτή ακριβώς την ιδιότητα θα εκμεταλευτούμε για την επίλυσή της.

Μεταφέρουμε την ποσότητα που εξαρτάται από το y στο αριστερό μέλος, ενώ το dx το φέρνουμε στο δεξί μέλος. Έτσι έχουμε:

$$\frac{dy}{B(y)} = A(x)dx. \quad (13)$$

Τώρα δεν έχουμε παρά να ολοκληρώσουμε κατά μέλη, το κάθε μέλος με την δική του μεταβλητή. Οπότε το αποτέλεσμα είναι:

$$\int \frac{dy}{B(y)} = \int A(x)dx \Rightarrow h(y) = g(x) + c. \quad (14)$$

Αυτή θα είναι και η λύση, σε πεπλεγμένη μορφή εν γένει.

Παράδειγμα 9 Να λυθεί η επόμενη διαφορική εξίσωση:

$$xdx - (5y^4 + 3)dy = 0.$$

Λύση:

Η διαφορική αυτή είναι μια χωριζομένων μεταβλητών. Δεν έχουμε παρά να ολοκληρώσουμε κατά μέλη.

$$\int x dx = \int (5y^4 + 3) dy + c \Rightarrow \frac{x^2}{2} = y^5 + 3y + c.$$

Άρα η λύση δίνεται από την σχέση:

$$y^5 + 3y - \frac{x^2}{2} + c = 0.$$

◇

Παράδειγμα 10 Να λυθεί η επόμενη διαφορική εξίσωση:

$$2x(y^2 + y)dx + (x^2 - 1)ydy = 0.$$

Λύση:

Είναι εύκολο να δούμε ότι έχει δύο λύσεις τουλάχιστο. Τις $y = 0, y = -1$. Πράγματι, η πρώτη είναι προφανές ότι ικανοποιεί την εξίσωση. Για την δεύτερη, θα πρέπει να υποθέσουμε ότι $y \neq 0$ και να την φέρουμε στην εξής μορφή:

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{2x(y+1)}{x^2-1}.$$

Τώρα είναι προφανές ότι και η $y = -1$ είναι μια λύση. Θέλουμε να βρούμε όλες τις υπόλοιπες και θα υποθέσουμε λοιπόν $y \neq 0, y \neq -1$. Δεν έχουμε λοιπόν παρά να ξεχωρίσουμε τις μεταβλητές και να ολοκληρώσουμε. Πολύ εύκολα παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \frac{2x}{x^2-1} dx &= -\frac{1}{y+1} dy \Rightarrow \int \frac{2x}{x^2-1} dx = -\int \frac{1}{y+1} dy + c. \Rightarrow \\ \ln|x^2-1| &= -\ln|y+1| + c \Rightarrow (x^2-1)(y+1) = \pm e^c = C \Rightarrow \\ y &= \frac{C}{x^2-1} - 1. \end{aligned}$$

◇

Παράδειγμα 11 Να λυθεί το επόμενο πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{aligned} (y^2 - 1)dx + y(x - 1)dy &= 0, \\ y(0) &= -2. \end{aligned}$$

Λύση:

Μπορούμε εύκολα όπως πριν να διαπιστώσουμε ότι οι $y = 1, y = -1$ είναι δύο λύσεις της διαφορικής εξίσωσης αλλά δεν ικανοποιούν την αρχική συνθήκη. Άρα

υποθέτω ότι $y \neq 1$, $y \neq -1$ χωρίς να χάνω τίποτα και φέρνω την διαφορική εξίσωση στην εξής μορφή:

$$\frac{1}{x-1} dx = -\frac{y}{y^2-1} dy \Rightarrow \int \frac{1}{x-1} dx = -\int \frac{y}{y^2-1} dy + c \Rightarrow$$

$$\ln|x-1| = -\frac{1}{2} \ln|y^2-1| + c \Rightarrow (x-1)^2(y^2-1) = \pm e^2 c = C.$$

Εννοείται βέβαια ότι έχουμε υποθέσει ότι $x \neq 1$. Έτσι λοιπόν η γενική λύση είναι της μορφής: $y(x) = \pm \sqrt{1 + \frac{C}{(x-1)^2}}$. Η αρχική συνθήκη $y(0) = -2$ ικανοποιείται για $c = 3$. Όμως βλέπουμε ότι έχουμε δύο λύσεις, όπως σε ένα προηγούμενο παράδειγμα, τις $y(x) = |\sqrt{1 + \frac{C}{(x-1)^2}}|$ (την θετική) και $y(x) = -|\sqrt{1 + \frac{C}{(x-1)^2}}|$ (την αρνητική). Προφανώς θα κρατήσουμε την αρνητική αυτή την φορά λόγω της αρχικής συνθήκης.

◇

5 ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Ορισμός 2 Μια συνάρτηση $f(x, y)$ λέγεται ομογενής βαθμού k αν και μόνο αν $f(bx, ly) = l^k f(x, y)$.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια διαφορική εξίσωση της μορφής:

$$y' = \frac{g(x, y)}{h(x, y)} \quad (15)$$

Αν g, h είναι ομογενής του ίδιου βαθμού τότε λέμε ότι η διαφορική εξίσωση (15) είναι μια ομογενής διαφορική εξίσωση.

Η επίλυση της στηρίζεται σε έναν μετασχηματισμό ο οποίος θα μετατρέψει την (15) σε χωριζομένων μεταβλητών. Πράγματι, ο μετασχηματισμός είναι: $z = \frac{y}{x}$. Τότε έχουμε:

$$(xz)' = \frac{g(x, xz)}{h(x, xz)} \Rightarrow xz' + z = \frac{x^k g(1, z)}{x^k h(1, z)} \Rightarrow xz' = \frac{g(1, z)}{h(1, z)} - z.$$

Η τελευταία εξίσωση είναι μια διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών με άγνωστη συνάρτηση την z . Γνωρίζουμε τον τρόπο επίλυσης της από την προηγούμενη ενότητα και αφού την υπολογίσουμε, αντιστρέφουμε τον μετασχηματισμό και υπολογίζουμε την y .

Παράδειγμα 12 Να λυθεί η επόμενη διαφορική εξίσωση:

$$y' = \frac{x^3 + y^3}{xy^2}.$$

Λύση:

Πολύ εύκολα διαπιστώνουμε ότι η διαφορική εξίσωση είναι μια ομογενής διαφορική εξίσωση. Πράγματι,

$$\begin{aligned} g(lx, ly) &= (lx)^3 + (ly)^3 = l^3 g(x, y) \\ h(lx, ly) &= (lx)(ly)^2 = l^3 h(x, y) \end{aligned}$$

Θέτουμε λοιπόν $y = xz$ και αντικαθιστώ στην εξίσωση,

$$\begin{aligned} xz' + z &= \frac{1+z^3}{z^2} \Rightarrow xz' z^2 + z^3 = 1 + z^3 \Rightarrow z' z^2 = \frac{1}{x} \Rightarrow \\ z^2 dz &= \frac{1}{x} dx \Rightarrow \frac{z^3}{3} = \ln|x| + c \Rightarrow z(x) = (3\ln|x| + c)^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Άρα, $y(x) = x(3\ln|x| + c)^{\frac{1}{3}}$.

◇

Παράδειγμα 13 Να λυθεί η επόμενη διαφορική εξίσωση:

$$y' = \frac{3y^2 + 2xy}{2xy + x^2}.$$

Λύση:

Όπως πριν μπορούμε να δείξουμε ότι η διαφορική αυτή εξίσωση είναι ομογενής βαθμού 2. Θέτουμε $y = xz$ και αντικαθιστούμε στην εξίσωση:

$$xz' + z = \frac{3z^2 + 2z}{2z + 1} \Rightarrow xz' = \frac{z^2 + z}{2z + 1} \Rightarrow \frac{2z + 1}{z^2 + z} dz = \frac{1}{x} dx.$$

Η τελευταία είναι χωριζομένων μεταβλητών και ολοκληρώνοντας κατά μέλη έχουμε:

$$\frac{z(z+1)}{x} = \pm e^c = C.$$

Σημειώστε ότι $\frac{2z+1}{z(z+1)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z+1}$.

Επομένως, $z^2 + z = cx$, αντικαθιστώντας $z = \frac{y}{x}$ παίρνουμε $y^2 + xy = cx^3$.

◇

6 ΠΛΗΡΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Έστω η διαφορική εξίσωση:

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0. \quad (16)$$

Ας υποθέσουμε ότι μπορούμε να βρούμε μια συνάρτηση δύο μεταβλητών $f(x, y)$ τέτοια ώστε

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = M(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = N(x, y). \quad (17)$$

Ας υποθέσουμε ακόμη ότι η x είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή και η y εξαρτάται από την x και μάλιστα είναι διαφορίσιμη ως προς x . Τότε

$$M(x, y) + N(x, y)y' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{df(x, y(x))}{dx}.$$

Εδώ χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα της αλυσίδας για συναρτήσεις δύο μεταβλητών. Τότε η εξίσωση (16) γίνεται

$$\frac{df(x, y(x))}{dx} = 0.$$

Προφανώς η λύση δίνεται πεπλεγμένα, εν γένει, από την σχέση $f(x, y(x)) = c$ η οποία προκύπτει από την προηγούμενη με ολοκλήρωση.

Η διαφορική εξίσωση (16) λοιπόν ονομάζεται πλήρης (ακριβής) όταν υπάρχει μια συνάρτηση δύο μεταβλητών με τις παραπάνω ιδιότητες.

Παρακάτω θα δώσουμε ένα θεώρημα με το οποίο θα αναγνωρίζουμε τις πλήρεις διαφορικές εξισώσεις.

Θεώρημα 2 Έστω ότι οι συναρτήσεις M, N, M_y, N_x όπου N_x, M_y μερικές παράγωγοι ως προς x και y αντίστοιχα, είναι συνεχείς σε μια ορθογώνια περιοχή $R : a < x < b, c < y < d$. Τότε η εξίσωση (16) είναι μια πλήρης διαφορική εξίσωση στην R όταν και μόνο όταν $M_y(x, y) = N_x(x, y)$ σε κάθε σημείο της R . Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει συνάρτηση f που ικανοποιεί τις εξισώσεις (17) αν και μόνο αν οι M, N ικανοποιούν την παραπάνω σχέση.

Παράδειγμα 14 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση:

$$(y \cos x + 2xe^y) + (\sin x + x^2 e^y - 1)y' = 0.$$

Λύση:

Παρατηρούμε ότι $M_y(x, y) = \cos x + 2xe^y = N_x(x, y)$ και βέβαια είναι συνεχείς παντού, επομένως είναι μια πλήρης διαφορική εξίσωση. Δεν μένει παρά να βρούμε μια f τέτοια ώστε

$$f_x(x, y) = y \cos x + 2xe^y, \quad f_y = \sin x + x^2 e^y - 1.$$

Ολοκληρώνοντας την πρώτη έχουμε

$$f(x, y) = y \sin x + x^2 e^y + h(y).$$

Θα πρέπει να υπολογίσουμε την h τώρα έτσι ώστε $f_y = N$. Πράγματι, πρέπει $\sin x + x^2 e^y + h'(y) = \sin x + x^2 e^y - 1$. Αυτό σημαίνει ότι $h'(y) = -1 \Rightarrow h(y) = -y + c$. Η γενική λύση δίνεται λοιπόν από την σχέση $y \sin x + x^2 e^y - y = c$.

◇

Παράδειγμα 15 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση:

$$(2xy) + (1 + x^2)y' = 0.$$

Λύση:

Παρατηρούμε ότι $N_x = M_y = 2x$ και επίσης όλες οι μερικές παράγωγοι και οι συναρτήσεις είναι συνεχείς παντού. Άρα ικανοποιείται το Θεώρημα (2) και άρα υπάρχει μια f με $f_x = 2xy \Rightarrow f(x, y) = x^2y + h(y)$. Όπως πριν θα πρέπει να υπολογίσουμε την h έτσι ώστε $f_y = 1 + x^2$. Θα πρέπει $x^2 + h'(y) = 1 + x^2 \Rightarrow h(y) = y + c$. Εύκολα λοιπόν παίρνουμε την λύση η οποία δίνεται ως εξής: $y = \frac{c}{x^2+1}$.

◇

7 ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΙ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ

Όπως είναι εύκολο κανείς να διαπιστώσει, δεν είναι αναγκαίο κάθε εξίσωση της μορφής (16) να είναι πλήρης. Όμως, μερικές φορές είναι δυνατόν βρεί κανείς έναν 'ολοκληρωτικό παράγοντα', μια συνάρτηση δύο μεταβλητών, έτσι ώστε αν πολλαπλασιάσουμε με αυτή κατά μέλη την εξίσ. (16), να μας προκύψει μια πλήρης.

Δυστυχώς όμως για να βρεί κανείς μια τέτοια είναι μια αρκετά δύσκολη υπόθεση. Όμως υπάρχουν κάποιες περιπτώσεις στις οποίες γίνεται σχετικά εύκολα.

Πρώτα θα υπολογίζουμε την ποσότητα

$$\frac{M_y - N_x}{N} = z(x, y).$$

Αυτή, εν γένει, είναι μια συνάρτηση δύο μεταβλητών. Αν όμως σε μια συγκεκριμένη διαφορική εξίσωση συμβαίνει να είναι συνάρτηση μόνο της x τότε η $p(x) = e^{\int z(x) dx}$ είναι ένας ολοκληρωτικός παράγοντας.

Αν δεν είναι όμως συνάρτηση μιας μεταβλητής, έχουμε ακόμα μια ευκαιρία να βρούμε ολοκληρωτικό παράγοντα. Θα υπολογίσουμε την ποσότητα

$$\frac{N_x - M_y}{M} = q(x, y).$$

Αν η συνάρτηση q είναι συνάρτηση μόνο της μεταβλητής y τότε ένας ολοκληρωτικός παράγοντας είναι $p(y) = e^{\int q(y) dy}$.

Παράδειγμα 16 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση:

$$\frac{y^2}{2} + 2ye^x + (y + e^x)y' = 0.$$

Λύση:

Διαπιστώνουμε ότι $M_y = y + 2e^x \neq e^x = N_x$. Άρα δεν είναι πλήρης. Υπολογίζουμε λοιπόν την διαφορά $M_y - N_x = y + e^x$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι $\frac{M_y - N_x}{N} = 1$.

Επομένως ένας ολοκληρωτικός παράγοντας είναι η $p(x) = e^x$. Πολλαπλασιάζω με την $p(x)$ την διαφορική εξίσωση και παίρνω την εξής εξίσωση

$$\frac{y^2}{2}e^x + 2ye^{2x} + (ye^x + e^{2x})y' = 0.$$

η οποία είναι πλήρης όπως μπορεί να διαπιστώσει κανείς. Επομένως υπάρχει μια $f(x, y)$ τέτοια ώστε $f_x = \frac{y^2}{2}e^x + 2ye^{2x} \Rightarrow f(x, y) = \frac{y^2}{2}e^x + ye^{2x} + h(y)$. Υπολογίζω την h από την σχέση $f_y = ye^x + e^{2x} \Rightarrow ye^x + e^{2x} + h'(y) = ye^x + e^{2x} \Rightarrow h(y) = c$. Επομένως η λύση δίνεται από την σχέση

$$\frac{y^2}{2}e^x + ye^{2x} = c.$$

◇

8 ΎΠΑΡΞΗ ΚΑΙ ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΛΥΣΗΣ

Σε αυτή την ενότητα, την τελευταία του κεφαλαίου 1, θα διαπραγματευτούμε την ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης για το γενικό πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y), \\ y(x_0) &= y_0. \end{aligned} \tag{18}$$

Προφανώς δεν είμαστε σε θέση να δώσουμε μια μέθοδο επίλυσης αυτής της διαφορικής αλλά μπορούμε να κάνουμε μια μελέτη για την ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης. Το παρακάτω θεώρημα μιλάει ακριβώς για αυτό το θέμα.

Θεώρημα 3 *Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και η f_y φραγμένη στη γειτονιά του σημείου (x_0, y_0) τότε το πρόβλημα αρχικών (18) έχει μια και μοναδική λύση στη γειτονιά αυτού του σημείου.*

Στην πραγματικότητα για την ύπαρξη της λύσης αρκεί η f να είναι συνεχής ενώ για την μοναδικότητα απαιτείται επιπλέον να είναι φραγμένη και η πρώτη παράγωγος της f ως προς y .

Η γραμμική εξίσωση πρώτης τάξης είναι προφανώς της μορφής (18) με $f(x, y) = g(x) - p(x)y$. Παρατηρήστε ότι $f_y(x, y) = -p(x)$. Δηλ. αν $p(x)$ συνεχείς σε ένα διάστημα τότε γνωρίζουμε ότι είναι και φραγμένη σε αυτό το διάστημα. Σε αυτή την περίπτωση λοιπόν το Θεώρημα 3 μας λέει αν p, g συνεχείς στην γειτονιά του (x_0, y_0) τότε υπάρχει μοναδική λύση στην περιοχή του σημείου αυτού. Δηλαδή, συμφωνεί με το Θεώρημα 1.

Ας πάμε στην εξίσωση του παραδείγματος (4). Θα διαπιστώσουμε ότι το πρόβλημα έχει μοναδική λύση σε μια περιοχή του $(3, 1)$. Πράγματι, σύμφωνα με το Θεώρημα 3 για να έχουμε μοναδική λύση θα πρέπει η μερική παράγωγος της f ως προς y να

είναι φραγμένη σε μια περιοχή του $(3, 1)$. Όμως $f(x, y) = 7(x-2)^2\sqrt{y} - \frac{1}{x-2}y$ και $f_y = 7(x-2)^2\frac{1}{2\sqrt{y}} - \frac{1}{x-2}$. Βλέπουμε ότι η $f(x, y)$ είναι συνεχής στο $(2, +\infty) \times [0, +\infty)$ και προφανώς το $(3, 1)$ ανήκει σε αυτή την περιοχή. Τέλος η f_y είναι φραγμένη στο διάστημα $(3 - \varepsilon_1, 3 + \varepsilon_1) \times (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ για κάποια $\varepsilon, \varepsilon_1 > 0$. Άρα έχει μοναδική λύση στο τελευταίο διάστημα.

Παρόμοια διερεύνηση μπορούμε να κάνουμε και για τις υπόλοιπες μορφές διαφορικών εξισώσεων που μελετήσαμε σε αυτό το κεφάλαιο.

9 ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Παράδειγμα 17 Να βρεθεί η γενική λύση:

$$y' + 2xy^2 = 0.$$

Λύση:

Αυτή σίγουρα δεν είναι γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης. Μοιάζει με “Bernoulli”, αλλά ας δοκιμάσουμε μήπως είναι χωριζομένων μεταβλητών.

$$\begin{aligned} y' = -2xy^2 &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -2xy^2 \Rightarrow \\ \frac{1}{y^2} dy &= -2x dx. \end{aligned}$$

Άρα είναι χωριζομένων μεταβλητών και δεν έχω παρά να ολοκληρώσω κατά μέλη. Το αποτέλεσμα είναι

$$-\frac{1}{y} = -x^2 + c \Rightarrow y = \frac{1}{x^2 + c}.$$

Ας δοκιμάσουμε με την “Bernoulli”. Ως γνωστόν θέτουμε $z = \frac{1}{y} \Rightarrow y' = -\frac{1}{z^2} z'$. Αντικαθιστούμε στην εξίσωση και έχουμε

$$\begin{aligned} -\frac{1}{z^2} z' + 2x \frac{1}{z^2} &= 0 \Rightarrow \\ -z' + 2x &= 0 \Rightarrow z = x^2 + c \Rightarrow y = \frac{1}{x^2 + c}. \end{aligned}$$

Καταλήξαμε στην ίδια γενική λύση. Ας υποθέσουμε τώρα ότι μας έδιναν και μια αρχική συνθήκη η οποία θα έπρεπε να ικανοποιηθεί. Ας πούμε ότι είναι η εξής: $y(1) = 0$. Ως γνωστόν δεν έχουμε παρά να υπολογίσουμε την σταθερά έτσι ώστε να ισχύει η αρχική συνθήκη. Δυστυχώς, δεν θα το καταφέρουμε αυτό. Δεν υπάρχει κάποιο c που να ικανοποιεί την αρχική συνθήκη. Μπορεί λοιπόν να μην έχει λύση το συγκεκριμένο πρόβλημα αρχικών τιμών. Ας δούμε τι μας λέει το Θεώρημα 3.

Η $f(x, y) = -2xy^2$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο (x_0, y_0) . Άρα από αυτό και μόνο έχουμε ύπαρξη λύσης. Η $f_y(x, y) = -4xy$ η οποία επίσης είναι συνεχής παντού,

άρα και φραγμένη σε οποιοδήποτε φραγμένο χωρίο. Επομένως, όχι μόνο υπάρχει λύση αλλά είναι και μοναδική για οποιοδήποτε σημείο (x_0, y_0) άρα και για το $(1, 0)$. Το λάθος λοιπόν το έχουμε κάνει εμείς. Και στις δύο μεθόδους που ακολουθήσαμε διαιρέσαμε με y και άρα θα έπρεπε να υποθέσουμε ότι $y \neq 0$. Ταυτόχρονα όμως θα έπρεπε να δούμε μήπως είναι μια λύση για την διαφορική εξίσωση και αν το κάνουμε θα δούμε ότι πράγματι είναι. Άρα, το σωστό θα ήταν να λέγαμε εξάρχής ότι η μηδενική συνάρτηση είναι μια λύση και ψάχνουμε να βρούμε τις υπόλοιπες. Δηλαδή είναι πιθανό, μια οποιαδήποτε μέθοδος να μην καταλήγει σε μια γενική λύση στην οποία ανήκουν όλες (με μια επιλογή της σταθεράς).

◇

Παράδειγμα 18 Να βρεθεί η γενική λύση:

$$xy' - y \ln y = 0.$$

Λύση:

Θα δείξουμε ότι είναι χωριζομένων μεταβλητών. Πράγματι

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \ln y}{x} \Rightarrow \frac{1}{y \ln y} dy = \frac{1}{x} dx.$$

Διαιρέσαμε πάλι με y οπότε θα περιμένουμε η γενική λύση να μην περιέχει την συνάρτηση $y = 0$. Επίσης δεν είναι επιτρεπτό, ως γνωστόν, $y = 1$ στην λογαριθμική συνάρτηση διότι εμφανίζεται στον παρονομαστή. Βλέπουμε πάλι ότι η $y = 1$ είναι μια λύση. Τέλος θα πρέπει $y > 0$ διότι αλλιώς δεν ορίζεται ο λογάριθμος.

Ας ολοκληρώσουμε κατά μέλη. Έχουμε

$$\ln(\ln(y)) = \ln|x| + c \Rightarrow \frac{\ln y}{|x|} = c \Rightarrow \ln y = c|x| \Rightarrow y = e^{|x|^c}.$$

Αν δουλεύουμε για $x > 0$ τότε η λύση είναι $y = e^{cx}$ αν δουλεύουμε για $x < 0$ η λύση είναι $y = e^{-cx}$. Θα πρέπει να δουλέψουμε αναγκαστικά σε τέτοια διαστήματα διότι το Θεώρημα 3 μας λέει ότι υπάρχει λύση για $x \neq 0$ και $y > 0$.

◇

Παράδειγμα 19 Να βρεθεί η γενική λύση:

$$y' = \frac{y}{x} \left(\ln \frac{y}{x} + 1 \right).$$

Λύση:

Η διαφορική εξίσωση γράφεται

$$y' = \frac{y \ln \frac{y}{x} + y}{x}.$$

Μπορούμε να δούμε ότι αυτή είναι μια ομογενής βαθμού 1. Πράγματι αν $g(x, y) = y \ln \frac{y}{x} + y$ τότε $g(lx, ly) = lg(x, y)$ και το ίδιο συμβαίνει και στον παρονομαστή. Άρα έχουμε να κάνουμε με μια ομογενή διαφορική εξίσωση. Θέτουμε λοιπόν $z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xz$ αντικαθιστώ στην εξίσωση και έχω

$$xz' + z = \frac{xz \ln z + xz}{x} = z \ln z + z \Rightarrow \frac{1}{z \ln z} dz = \frac{1}{x} dx \Rightarrow z = e^{|x|^c}.$$

Επομένως η λύση είναι $y = xe^{c|x|}$.

◇

Παράδειγμα 20 Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$y' = \frac{y}{4x} + \frac{x}{y^3},$$

$$y(1) = 1.$$

Λύση:

Η εξίσωση αυτή είναι μια εξίσωση “Bernoulli”. Ας δούμε πρώτα τι έχει να μας πει το θεώρημα 3 γιαυτό. Η $f(x, y) = \frac{y}{4x} + \frac{x}{y^3}$ είναι συνεχής σε κάθε περιοχή που δεν περιέχει τα σημεία $\{0\} \times R$ και $R \times \{0\}$. Άρα στην περιοχή του σημείου $(1, 1)$ είναι συνεχής και επομένως σε αυτήν υπάρχει μια τουλάχιστο λύση. Η $f_y(x, y) = \frac{1}{4x} - \frac{3x}{y^4}$. Είναι βέβαια φραγμένη σε ένα διάστημα της μορφής $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon) \times (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ δηλ. σε μια περιοχή του $(1, 1)$. Άρα σε αυτή την περιοχή έχει μοναδική λύση. Ας ξεκινήσουμε την διαδικασία εύρεσης της.

Θέτω $z = y^4$ και αντικαθιστώντας στην εξίσωση καταλήγω στην εξής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$z' - \frac{1}{x}z = 4x.$$

Η γενική λύση της είναι $z(x) = x(4x + c)$. Αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό έχουμε $y(x) = (x(4x + c))^{\frac{1}{4}}$ και με την αρχική συνθήκη έχουμε ότι η λύση που ικανοποιεί και την αρχική συνθήκη είναι $y(x) = (x(4x - 3))^{\frac{1}{4}}$

◇

Παράδειγμα 21 Να βρεθεί η γενική λύση και κατόπιν να εξετασθεί η συμπεριφορά της στο άπειρο:

$$y' + y = xe^{-x} + 1.$$

Λύση:

Η διαφορική εξίσωση αυτή είναι γραμμική με $p(x) = 1, g(x) = xe^{-x} + 1$. Τον τύπο της λύσης τον γνωρίζουμε και είναι

$$y(x) = \frac{\int \mu(x)g(x)dx + c}{\mu(x)},$$

με $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$. Υπολογίζουμε πρώτα το μ το οποίο είναι ίσο με e^x . Έπειτα υπολογίζουμε την γενική λύση η οποία είναι $y(x) = \frac{x^2}{2e^x} + 1 + \frac{c}{e^x}$. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του De l'Hospital εύκολα παρατηρούμε ότι όλες οι λύσεις συγκλίνουν στην μονάδα. Έχουν δηλαδή την ίδια συμπεριφορά στο $+\infty$.

◇

Παράδειγμα 22 Να βρεθεί η γενική λύση :

$$ydx + (x + 3y^2)dy = 0.$$

Λύση:

Θα δούμε μήπως είναι πλήρης διαφορική εξίσωση. Για να το δούμε αυτό θα πρέπει να κοιτάξουμε το Θεώρημα 2. Ας την φέρουμε όμως πρώτα στην μορφή που γνωρίζουμε. Διαιρούμε με dx και έχουμε

$$y + (x + 3y^2)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Άρα $M(x, y) = y$ και $N(x, y) = x + 3y^2$. Υπολογίζουμε τις M_y, N_x και έχουμε $M_y = 1 = N_x$. Παρατηρούμε ακόμα ότι ικανοποιείται το Θεώρημα 2 και επομένως υπάρχει $g(x, y)$ με $g_x = y, g_y = x + 3y^2$. Από την πρώτη έχουμε ότι $g(x, y) = yx + h(y)$ και θα πρέπει να βρούμε την h έτσι ώστε $g_y = x + 3y^2$. Πράγματι, πρέπει να ισχύει $x + h'(y) = x + 3y^2 \Rightarrow h'(y) = 3y^2 \Rightarrow h(y) = y^3$. Η λύση λοιπόν είναι $xy + y^3 = c$.

◇

ΚΕΦΑΛΑΙΟ II. ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης. Δηλαδή, στην εξίσωση θα εμπλέκεται και η δεύτερη παράγωγος της άγνωστης συνάρτησης. Συγκεκριμένα, θα ασχοληθούμε με γραμμικές εξισώσεις δεύτερης τάξης των οποίων η τυπική μορφή είναι η εξής

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t). \quad (19)$$

Η εξίσωση αυτή είναι μια ομογενής γραμμική εξίσωση δεύτερης τάξης, όταν $g(t) = 0$, ενώ λέγεται μη ομογενής, αν $g(t) \neq 0$. Η εξίσωση (19) μαζί με τις συνθήκες

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1, \quad (20)$$

αποτελούν ένα πρόβλημα αρχικών τιμών, όπως και στις εξισώσεις πρώτης τάξης.

Στην πρώτη ενότητα θα ασχοληθούμε με την εξίσωση (19) όταν οι συντελεστές της άγνωστης συνάρτησης (δηλ. p, q) είναι σταθερές.

10 ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

Σε αυτή την ενότητα θα θεωρήσουμε ότι $p(t) = a_1, q(t) = a_0, g(t) = 0$. Δηλαδή θα ασχοληθούμε με ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης.

Όπως θα δούμε η επίλυση τους είναι αρκετά εύκολη. Ψάχνουμε για λύσεις της μορφής e^{rt} . Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι μια λύση γράφεται σε αυτή την μορφή. Δεν έχουμε παρά να υπολογίσουμε την r για να ικανοποιείται η διαφορική εξίσωση. Πράγματι, πρέπει να ισχύει

$$\begin{aligned} (e^{rt})'' + a_1(e^{rt})' + a_0 e^{rt} &= 0 \Rightarrow \\ r^2 e^{rt} + r a_1 e^{rt} + a_0 e^{rt} &= 0 \Rightarrow \\ (r^2 + r a_1 + a_0) e^{rt} &= 0 \Rightarrow \\ r^2 + r a_1 + a_0 &= 0. \end{aligned}$$

Το r λοιπόν θα πρέπει να ικανοποιεί την τελευταία εξίσωση την οποία και ονομάζουμε **χαρακτηριστική εξίσωση** της διαφορικής εξίσωσης.

Υπάρχουν δηλαδή τρεις περιπτώσεις. Η μια είναι, η χαρακτηριστική εξίσωση, να έχει δύο διαφορετικές πραγματικές λύσεις. Η δεύτερη περίπτωση είναι να έχει μια διπλή ρίζα και η τρίτη να έχει μιγαδικές λύσεις. Ας δούμε στην πρώτη περίπτωση τι αποτέλεσμα έχουμε.

Περίπτωση 1

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε λ_1, λ_2 πραγματικές ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης και διαφορετικές. Τότε, σύμφωνα με τα προηγούμενα, προφανώς οι $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$

είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης. Όπως μπορούμε πολύ εύκολα να διαπιστώσουμε και οι $c_1 e^{\lambda_1 t}, c_2 e^{\lambda_2 t}$ για οποιεσδήποτε σταθερές, είναι επίσης λύσεις. Τέλος μπορούμε να διαπιστώσουμε (αφήνεται σαν άσκηση) ότι και το άθροισμα δύο τέτοιων λύσεων, είναι επίσης μια λύση. Άρα η συνάρτηση

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (21)$$

είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης για τυχαίες σταθερές c_1, c_2 . Παρακάτω θα δείξουμε ότι όλες οι λύσεις έχουν αυτή την μορφή. Δηλαδή η διαδικασία που ακολουθήσαμε μας οδηγεί στην γενική λύση, όπως λέμε. Δηλαδή κάθε λύση περιέχεται στην μορφή (21).

Περίπτωση 2

Σε αυτή την περίπτωση, έχουμε μια διπλή ρίζα, έστω λ . Δηλαδή μια λύση εκθετικής μορφής είναι η $e^{\lambda x}$. Χρειαζόμαστε άλλη μια ειδική λύση για να κατασκευάσουμε την γενική. Ας υποθέσουμε ότι αυτή έχει την μορφή $y(x) = e^{\lambda x} Y(x)$ και θα προσαρμόσουμε να βρούμε την συνάρτηση Y έτσι ώστε η y να ικανοποιεί την εξίσωση. Πράγματι, υπολογίζουμε τις παραγώγους της y και αντικαθιστούμε στην εξίσωση,

$$\begin{aligned} (Y'' + 2\lambda Y' + \lambda^2 Y) + a_1(Y' + \lambda Y) + a_0 Y &= 0 \Rightarrow \\ Y'' + (2\lambda + a_1)Y' + (\lambda^2 + a_1\lambda + a_0)Y &= 0. \end{aligned}$$

Έχουμε μια διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης με άγνωστη συνάρτηση την Y . Παρατηρούμε όμως ότι $2\lambda + a_1 = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$ αφού λ διπλή ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης της αρχικής εξίσωσης. Άρα καταλήγουμε στην εξής απλή διαφορική εξίσωση με άγνωστη συνάρτηση την Y ,

$$Y'' = 0 \Rightarrow Y = c_1 + c_2 x.$$

Άρα, η $y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$. Παρακάτω θα δείξουμε ότι πράγματι η γενική λύση είναι αυτής της μορφής.

Περίπτωση 3

Στην τελευταία αυτή περίπτωση, έχουμε δύο μιγαδικές ρίζες. Ας είναι αυτές οι $r_1 = \lambda + i\mu, r_2 = \lambda - i\mu$. Η γενική λύση θα δίνεται λοιπόν από την $y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$. Όμως μπορούμε αυτό να το γράψουμε με ένα τρόπο ώστε να μην εμφανίζεται μιγαδικός αριθμός. Ας ανακαλέσουμε μια σχέση από την μιγαδική ανάλυση. Γνωρίζουμε ότι ισχύει $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Άρα η γενική λύση είναι $y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} = e^{\lambda x} ((c_1 + c_2) \cos(\mu x) + i(c_1 - c_2) \sin(\mu x)) = c_1' e^{\lambda x} \cos(\mu x) + c_2' e^{\lambda x} \sin(\mu x)$ με $c_1' = c_1 + c_2, c_2' = i(c_1 - c_2)$. Αν διαλέξουμε c_1, c_2 να είναι συζυγείς μιγαδικοί, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι c_1', c_2' είναι πραγματικοί αριθμοί.

Παράδειγμα 23 Να λυθεί το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} y'' + 5y' + 6y &= 0, \\ y(0) &= 2, \quad y'(0) = 3. \end{aligned}$$

Λύση:

Το πρώτο πράγμα που κάνουμε σε αυτές τις εξισώσεις (με σταθερούς συντελεστές) είναι να κοιτάξουμε την χαρακτηριστική εξίσωση, η οποία στην προκειμένη περίπτωση είναι

$$r^2 + 5r + 6 = (r + 2)(r + 3) = 0.$$

Άρα οι δυνατές τιμές του r είναι οι $r_1 = -3, r_2 = -2$ και επομένως η γενική λύση είναι

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}.$$

Για να ικανοποιηθούν και οι αρχικές συνθήκες θα πρέπει να διαλέξουμε τις σταθερές έτσι ώστε $y(0) = 2, y'(0) = 3$. Η πρώτη σχέση μας δίνει $c_1 + c_2 = 2$. Για να δούμε τι μας δίνει η δεύτερη θα πρέπει να βρούμε πρώτα την παράγωγο της λύσης, η οποία είναι $y'(t) = -2c_1 e^{-2t} - 3c_2 e^{-3t}$. Έτσι η δεύτερη αρχική συνθήκη μας δίνει $-2c_1 - 3c_2 = 3$. Λύνοντας αυτές τις δύο εξισώσεις με αγνώστους τις c_1, c_2 βρίσκουμε ότι $c_1 = 9, c_2 = -7$. Άρα η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$y(t) = 9e^{-2t} - 7e^{-3t}.$$

◇

Παράδειγμα 24 Να βρεθεί μια διαφορική εξίσωση της οποίας η γενική λύση είναι

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t}.$$

Λύση:

Αυτή η γενική λύση μοιάζει να προέρχεται από μια διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Από την μορφή της λοιπόν έχουμε την χαρακτηριστική εξίσωση της διαφορικής εξίσωσης που ψάχνουμε, η οποία είναι $(r - 2)(r + 3) = 0 \Rightarrow r^2 + r - 6 = 0$ επομένως όπως εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε η διαφορική εξίσωση που έχει αυτή την χαρακτηριστική εξίσωση είναι η

$$y''(t) + y'(t) - 6y = 0.$$

◇

Παράδειγμα 25 Να λυθεί το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} 16y'' - 8y' + 145y &= 0, \\ y(0) &= -2, \quad y'(0) = 1. \end{aligned}$$

Λύση:

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $16r^2 - 8r + 145 = 0$ και οι ρίζες της είναι $\frac{1}{4} \pm 3i$. Οπότε η γενική λύση της θα είναι

$$y(t) = c_1 e^{\frac{1}{4}t} \cos 3t + c_2 e^{\frac{1}{4}t} \sin 3t.$$

Για να ικανοποιηθεί η πρώτη αρχική συνθήκη πρέπει να ισχύει $y(0) = c_1 = -2$ ενώ, αφού βρούμε την παράγωγο της λύσης, υπολογίζουμε και την δεύτερη σταθερά η οποία είναι $c_2 = \frac{1}{2}$. Άρα η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$y(t) = -2e^{\frac{t}{2}} \cos 3t + \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}} \sin 3t.$$

Παράδειγμα 26 Να λυθεί το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} y'' - y' + 0.25y &= 0, \\ y(0) &= 2, \quad y'(0) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Λύση:

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$r^2 - r + 0.25 = 0,$$

άρα οι ρίζες είναι $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$. Άρα η γενική λύση είναι $y(t) = c_1 e^{\frac{t}{2}} + c_2 t e^{\frac{t}{2}}$. Όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα υπολογίζουμε τις σταθερές c_1, c_2 έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι αρχικές συνθήκες. Οι τιμές τους είναι $c_1 = 2, c_2 = -\frac{2}{3}$. Άρα η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι $y(t) = 2e^{\frac{t}{2}} - \frac{2}{3}te^{\frac{t}{2}}$.

◇

11 ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ ΜΕ ΜΗ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

Σε αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με τις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης με μη σταθερούς συντελεστές. Εδώ είναι χρήσιμο να ορίσουμε την έννοια του διαφορικού τελεστή. Έστω p, q συνεχείς συναρτήσεις σε ένα ανοιχτό διάστημα I , δηλ. για $a < t < b$. Τότε για κάθε συνάρτηση ϕ δύο φορές παραγωγίσιμη στο I , ορίζουμε τον διαφορικό τελεστή L από την εξίσωση

$$L[\phi] = \phi'' + p\phi' + q\phi.$$

Παρατηρήστε λοιπόν, ότι ο διαφορικός τελεστής είναι μια "μηχανή" η οποία παίρνει μια συνάρτηση και δίνει μια άλλη. Το πεδίο τιμών του συγκεκριμένου διαφορικού τελεστή είναι οι συναρτήσεις που είναι δύο φορές παραγωγίσιμες, ενώ για παράδειγμα μια συνάρτηση που έχει μόνο την πρώτη παράγωγο, δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού του διαφορικού τελεστή που ορίσαμε παραπάνω.

Σύμφωνα λοιπόν με αυτό τον ορισμό η ομογενής διαφορική εξίσωση (19) γράφεται σαν $L[y](t) = 0$. Ας αναφέρουμε ένα θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας για το πρόβλημα αρχικών τιμών.

Θεώρημα 4 Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$L[y](t) = g(t), \\ y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1.$$

όπου p, q, g είναι συνεχείς συναρτήσεις σε ένα ανοιχτό διάστημα I . Τότε υπάρχει ακριβώς μια λύση αυτού του προβλήματος και η λύση ορίζεται σε όλο το διάστημα I .

Είναι πολύ εύκολο να αποδειχθεί η επόμενη πρόταση..

Πρόταση 1 Αν y_1, y_2 είναι λύσεις της εξίσωσης $L[y](t) = 0$ τότε ο γραμμικός συνδυασμός $c_1 y_1 + c_2 y_2$ είναι επίσης μια λύση για οποιαδήποτε τιμή των σταθερών c_1, c_2 .

Ορισμός 3 Έστω δύο λύσεις της εξίσωσης $L[y](t) = 0$. Η παρακάτω ορίζουσα λέγεται ορίζουσα Wronski των λύσεων y_1, y_2

$$W(y_1, y_2)(t_0) = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix} = y_1(t_0)y_2'(t_0) - y_1'(t_0)y_2(t_0).$$

Θεώρημα 5 Υποθέτουμε ότι y_1, y_2 είναι δύο λύσεις της εξίσωσης $L[y](t) = 0$ και ότι η ορίζουσα Wronski δεν είναι μηδέν στο σημείο t_0 στο οποίο έχουν ορισθεί οι συνθήκες $y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1$. Τότε υπάρχει μια επιλογή των σταθερών c_1, c_2 για την οποία η $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση και τις αρχικές συνθήκες. Τέλος αν υπάρχει ένα σημείο t_0 για το οποίο η ορίζουσα Wronski δεν είναι μηδέν, τότε η οικογένεια λύσεων $y(t) = c_1 y_1 + c_2 y_2$ περιλαμβάνει κάθε λύση της εξίσωσης.

Η λύση αυτή ονομάζεται γενική λύση (αφού περιλαμβάνει κάθε λύση της εξίσωσης) και επιπλέον οι y_1, y_2 που σχηματίζουν αυτή την γενική λύση, ονομάζεται **θεμελιώδες σύνολο λύσεων** της εξίσωσης. Αποδεικνύεται ότι αν p, q είναι συνεχείς σε κάποιο διάστημα I τότε πάντα υπάρχει ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων της εξίσωσης.

Ορισμός 4 Δυο συναρτήσεις f, g ονομάζονται γραμμικώς εξαρτημένες σε ένα διάστημα I , αν υπάρχουν δύο σταθερές k_1, k_2 όχι και οι δύο μηδέν, τέτοιες ώστε

$$k_1 f(t) + k_2 g(t) = 0,$$

για κάθε t στο I . Αντίθετως, ονομάζονται γραμμικώς ανεξάρτητες.

Θεώρημα 6 Έστω y_1, y_2 λύσεις της $L[y](t) = 0$ όπου p, q συνεχείς σε ένα ανοιχτό διάστημα I . Τότε οι y_1, y_2 είναι γραμμικώς εξαρτημένες στο I αν και μόνο αν η $W(y_1, y_2)(t)$ είναι μηδέν για όλα τα t στο I . Εναλλακτικά, οι y_1, y_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητες στο I αν και μόνο αν η $W(y_1, y_2)(t)$ δεν μηδενίζεται πουθενά στο I .

Μπορούμε να υπολογίσουμε την ορίζουσα Wronski μόνο από την εξίσωση, χωρίς να γνωρίζουμε δηλ. κάποιες λύσεις της. Έστω y_1, y_2 λύσεις της ομογενούς και

p, q είναι συνεχής σε ένα ανοιχτό διάστημα I τότε η ορίζουσα *Wronski* δίνεται από την σχέση $W(t) = ce^{-\int p(t)dt}$, όπου c μια σταθερά που εξαρτάται από τις λύσεις y_1, y_2 αλλά όχι από το διάστημα I . Δηλ. υπολογίζουμε την ορίζουσα με διαφορά μια σταθερά. Επιπλέον, η ορίζουσα είναι είτε μηδέν παντού στο I (αν $c = 0$) είτε διάφορη του μηδενός.

Η απόδειξη του παραπάνω έχει ως εξής:

Οι y_1, y_2 ικανοποιούν τις εξής σχέσεις

$$\begin{aligned}y_1'' + p(t)y_1' + q(t)y_1 &= 0, \\y_2'' + p(t)y_2' + q(t)y_2 &= 0.\end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη με την $-y_2$ και την δεύτερη με y_1 και προσθέτοντας έχουμε

$$(y_1 y_2'' - y_1'' y_2) + p(t)(y_1 y_2' - y_1' y_2) = 0.$$

Παρατηρώντας ότι $W' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2$ μπορούμε να γράψουμε την τελευταία εξίσωση ως εξής

$$W' + p(t)W = 0,$$

της οποίας η λύση είναι $W(t) = ce^{-\int p(t)dt}$.

Παρατήρηση: Αν θέλουμε να υπολογίσουμε την ορίζουσα *Wronski* δύο γνωστών λύσεων της ομογενούς, θα πρέπει να το κάνουμε κατευθείαν από τον ορισμό και όχι χρησιμοποιώντας τον παραπάνω τύπο, διότι ο τύπος αυτός μας δίνει την τιμή της ορίζουσας με διαφορά μια πολλαπλασιαστική σταθερά, άρα δεν γνωρίζουμε έτσι αν είναι μηδέν ή όχι. Αυτό είναι λογικό διότι, οποιεσδήποτε δύο λύσεις της ομογενούς δεν αποτελούν πάντα θεμελιώδες σύνολο λύσεων.

Ας συνοψίσουμε λίγο όλα αυτά τα πράγματα σε μερικές γραμμές. Έστω p, q συνεχείς σε ένα ανοιχτό διάστημα I . Έστω επίσης y_1, y_2 λύσεις της

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0.$$

Τότε οι επόμενες τέσσερις προτάσεις είναι ισοδύναμες.

- 1) Οι συναρτήσεις y_1, y_2 αποτελούν ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων στο I .
- 2) Οι συναρτήσεις y_1, y_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητες στο I .
- 3) $W(y_1, y_2)(t_0) \neq 0$ για κάποιο t_0 στο I .
- 4) $W(y_1, y_2)(t) \neq 0$ για όλα τα t στο I .

Το συμπέρασμα όσον αφορά την εύρεση λύσης είναι ότι δεν υπάρχει κάποιος τρόπος να βρούμε ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων. Παρόλα αυτά αν γνωρίζουμε ήδη μία μπορούμε να υπολογίσουμε και την δεύτερη από την εξής σχέση

$$y_2(t) = y_1(t) \int \frac{W(t)}{y_1^2} dt.$$

Τέλος, όσον αφορά τις μη ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης, δηλαδή για την εξίσωση $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$, ισχύει το επόμενο θεώρημα

Θεώρημα 7 Αν οι συναρτήσεις p, q, g είναι συνεχείς σε ένα ανοιχτό διάστημα I , και αν οι συναρτήσεις y_1, y_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς εξίσωσης, τότε μια μερική λύση είναι η

$$Y(t) = -y_1(t) \int \frac{y_2(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt + y_2(t) \int \frac{y_1(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt,$$

και η γενική λύση είναι η

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + Y(t).$$

Απόδειξη:

ΑΣ υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε την γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης και είναι η

$$y_c(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t).$$

Ψάχνουμε να βρούμε μια ειδική λύση της μη ομογενούς η οποία θα έχει την μορφή

$$y(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t), \quad (22)$$

όπου u_1, u_2 άγνωστες συναρτήσεις τις οποίες θα πρέπει να υπολογίσουμε, ενώ y_1, y_2 είναι το θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ομογενούς. Η συνάρτηση y λοιπόν θα πρέπει να ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση. Παραγωγίζουμε την y και έχουμε

$$y' = u_1'(t)y_1(t) + u_1(t)y_1'(t) + u_2'(t)y_2(t) + u_2(t)y_2'(t). \quad (23)$$

Απαιτούμε $u_1'(t)y_1(t) + u_2'(t)y_2(t) = 0$, οπότε η παραπάνω σχέση γίνεται $y'(t) = u_1(t)y_1'(t) + u_2(t)y_2'(t)$. Παραγωγίζοντας εκ νέου έχουμε

$$y''(t) = u_1'(t)y_1'(t) + u_1(t)y_1''(t) + u_2'(t)y_2'(t) + u_2(t)y_2''(t).$$

Τώρα, αντικαθιστούμε τις εκφράσεις που έχουμε για τις y, y', y'' στην διαφορική εξίσωση και έχουμε

$$\begin{aligned} & u_1(t)[y_1''(t) + p(t)y_1'(t) + q(t)y_1(t)] \\ & + u_2(t)[y_2''(t) + p(t)y_2'(t) + q(t)y_2(t)] \\ & + u_1'(t)y_1'(t) + u_2'(t)y_2'(t) = g(t). \end{aligned}$$

Οι εκφράσεις στις αγκύλες όμως είναι μηδέν, διότι οι y_1, y_2 είναι λύσεις της ομογενούς. Επομένως έχουμε

$$u_1'(t)y_1'(t) + u_2'(t)y_2'(t) = g(t).$$

Έχουμε λοιπόν στα χέρια μας δύο εξισώσεις με τις παραγώγους των δύο άγνωστων συναρτήσεων. Η λύση του συστήματος είναι

$$u_1'(t) = -\frac{y_2(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)}, u_2'(t) = \frac{y_1(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)},$$

όπου η $W(y_1, y_2)$ η ορίζουσα *Wronski* των y_1, y_2 . Η ορίζουσα είναι διάφορη του μηδενός διότι οι y_1, y_2 είναι θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ομογενούς. Τέλος, ολοκληρώνοντας τις προηγούμενες σχέσεις έχουμε το ζητούμενο.

◇

Στο παράδειγμα (23) βρήκαμε ότι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης είναι οι $y_1(t) = e^{-2t}, y_2(t) = e^{-3t}$. Ας υπολογίσουμε την ορίζουσα *Wronski*, των δύο αυτών συναρτήσεων.

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{-2t} & e^{-3t} \\ -2e^{-2t} & -3e^{-3t} \end{vmatrix} = -e^{-5t}$$

δηλαδή η ορίζουσα είναι διάφορη του μηδενός για όλες τις τιμές του t , άρα όπως είπαμε πριν, οι y_1, y_2 αποτελούν ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων για την διαφορική εξίσωση. Γενικά μπορεί ναδειχθεί ότι όταν έχουμε σταθερούς συντελεστές και οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι πραγματικές και διαφορετικές, έστω r_1, r_2 τότε οι $y_1(t) = e^{r_1 t}, y_2(t) = e^{r_2 t}$ αποτελούν ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων. Πράγματι αν υπολογίσουμε την ορίζουσα *Wronski* θα δούμε ότι είναι ίση με $(r_2 - r_1)e^{(r_1 + r_2)t}$ δηλαδή διάφορη του μηδενός.

Στην περίπτωση που είχαμε μιγαδικές ρίζες ισχυριστήκαμε ότι οι συναρτήσεις $e^{it} \cos(\mu t), e^{it} \sin(\mu t)$ είναι ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων. Πράγματι, αν υπολογίσουμε την ορίζουσα *Wronski* θα δούμε ότι είναι μe^{it} . Αν λοιπόν $\mu \neq 0$ τότε η ορίζουσα είναι διάφορη του μηδενός και άρα οι δύο συναρτήσεις αποτελούν θεμελιώδες σύνολο λύσεων.

Στην τρίτη περίπτωση, είδαμε ότι δύο λύσεις είναι οι $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}$. Αυτές αποτελούν θεμελιώδες σύνολο λύσεων διότι η ορίζουσα *Wronski* είναι ίση με $e^{2\lambda t} \neq 0$.

Παράδειγμα 27 Να βρεθεί η γενική λύση στο παρακάτω πρόβλημα όταν γνωρίζουμε ότι $y_1(t) = t$ είναι μια λύση

$$ty'' - (t+2)y' + (1 + \frac{2}{t})y = 0.$$

Λύση:

Ας υπολογίσουμε πρώτα την ορίζουσα *Wronski* της διαφορικής εξίσωσης.

$$W = ce^{\int \frac{t+2}{t} dt} = ct^2 e^t.$$

Έτσι με την γνωστή σχέση, μπορούμε να υπολογίσουμε και μια δεύτερη λύση. Πράγματι,

$$y_2(t) = ct \int \frac{t^2 e^t}{t^2} dt = ct \int e^t dt = cte^t.$$

Άρα η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t).$$

◇

12 ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΩΝ.

Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε πως μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει τις θεωρίες των δυναμοσειρών, για την επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης. Πρώτα θα κάνουμε μια ανασκόπηση από την θεωρία των δυναμοσειρών.

Καταρχήν, θα πρέπει να πούμε ότι δυναμοσειρά είναι μια συνάρτηση, για παράδειγμα του x . Η τυπική μορφή μιας δυναμοσειράς είναι η εξής

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m a_n (x - x_0)^n.$$

Δυναμοσειρά λοιπόν είναι ένα άπειρο άθροισμα συγκεκριμένων συναρτήσεων, δηλ. το άθροισμα των $a_n (x - x_0)^n$.

Η δυναμοσειρά, γίνεται απλά απειροσειρά, αν επιλέξει κανείς ένα συγκεκριμένο x , δηλ. τότε γίνεται ένα άπειρο άθροισμα αριθμών (αφού το x_0 είναι δεδομένος αριθμός). Θα λέμε λοιπόν, ότι για κάποιο συγκεκριμένο x η δυναμοσειρά συγκλίνει, όταν η απειροσειρά συγκλίνει. Μπορεί να φανταστεί κανείς ότι μια δυναμοσειρά δεν μπορεί να συγκλίνει για κάθε x , εν γένει.

Ακόμη, λέμε ότι η δυναμοσειρά συγκλίνει απόλυτα για ένα σημείο x αν η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n (x - x_0)^n|$$

συγκλίνει. Μπορεί να αποδειχθεί ότι, αν η σειρά συγκλίνει απόλυτα, τότε συγκλίνει και απλά. Το αντίστροφο δεν είναι πάντα αληθές.

Ένα χρήσιμο εργαλείο για την απόλυτη σύγκλιση μιας δυναμοσειράς είναι το κριτήριο του λόγου. Αν $a_n \neq 0$ και για μια σταθερή τιμή του x

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} (x - x_0)^{n+1}}{a_n (x - x_0)^n} \right| = |x - x_0| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x - x_0| L,$$

τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει απόλυτα στο x αν $|x - x_0| L < 1$, και αποκλίνει αν $|x - x_0| L > 1$. Αν $|x - x_0| L = 1$ δεν μπορούμε να βγάλουμε κάποιο συμπέρασμα.

Αν η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάποιο $x = x_1$, τότε συγκλίνει απόλυτα για όλα τα x τέτοια ώστε $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$. Αν αποκλίνει για $x = x_1$, τότε αποκλίνει και για x με $|x - x_0| > |x_1 - x_0|$.

Υπάρχει ένας μη αρνητικός αριθμός ρ , που καλείται **ακτίνα σύγκλισης**, τέτοιος ώστε η δυναμοσειρά να συγκλίνει απόλυτα για όλα τα x με $|x - x_0| < \rho$ και αποκλίνει για $|x - x_0| > \rho$. Για μια σειρά που αποκλίνει για όλα τα x λέμε ότι το ρ είναι άπειρο. Αν $\rho > 0$, τότε το διάστημα $|x - x_0| < \rho$ καλείται **διάστημα σύγκλισης**. Η σειρά μπορεί να αποκλίνει ή να συγκλίνει όταν $|x - x_0| = \rho$.

Αν οι $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_o)^n$ και $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_o)^n$ συγκλίνουν στις $f(x), g(x)$ αντίστοιχα, για $|x-x_o| < \rho$, με $\rho > 0$, τότε τα ακόλουθα είναι αληθή για το διάστημα σύγκλισης.

1) Οι σειρές μπορούν να προστεθούν ή να αφαιρεθούν κατά όρους,

$$f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)(x-x_o)^n.$$

2) Οι σειρές μπορούν να πολλαπλασιαστούν,

$$f(x)g(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_o)^n \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_o)^n \right] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_o)^n,$$

όπου $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$.

3) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και έχει παραγώγους όλων των τάξεων για $|x-x_o| < \rho$. Επιπλέον, οι $f', f'', \dots$ μπορούν να υπολογιστούν παραγωγίζοντας τη σειρά κατά όρους, δηλ.

$$\begin{aligned} f' &= a_1 + 2a_2(x-x_o) + \dots + na_n(x-x_o)^{n-1} + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_o)^{n-1}, \\ f'' &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-x_o)^{n-2}, \end{aligned}$$

παρόμοια για τις άλλες παραγώγους. Κάθε μια από τις σειρές αυτές συγκλίνει απόλυτα για $|x-x_o| < \rho$.

4) Η τιμή του a_n δίνεται από τον τύπο

$$a_n = \frac{f^n(x_o)}{n!}.$$

Η σειρά αυτή καλείται σειρά *Taylor* της συνάρτησης f στην περιοχή του $x = x_o$. Δηλ. αν μια συνάρτηση είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη μπορεί να γραφεί σαν το όριο μιας δυναμοσειράς.

5) Αν $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_o)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_o)^n$ για κάθε x , τότε $a_n = b_n, n = 0, 1, \dots$. Ειδικότερα, αν $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_o)^n = 0$ για κάθε x , τότε $a_0 = a_1 = \dots = 0$. Μια συνάρτηση f που έχει ανάπτυγμα σε σειρά *Taylor* στην περιοχή του $x = x_o$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_o)}{n!} (x-x_o)^n,$$

με ακτίνα σύγκλισης $\rho > 0$, λέγεται **αναλυτική** στο $x = x_o$. Σύμφωνα με τις ιδιότητες που έχουν αναφερθεί, αν οι f, g είναι αναλυτικές στο x_o , οι $f \pm g, f \cdot g, f/g$ είναι αναλυτικές στο $x = x_o$.

Μετατόπιση του Δείκτη 'Αθροισής. Ο δείκτης άθροισης μπορεί να μετατοπισθεί αν χρειάζεται αρκεί να αλλάξουμε κατάλληλα και την ποσότητα που αθροίζουμε. Για παράδειγμα ισχύει το εξής

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+2} x^{m+2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^{n+2}$$

Τώρα είμαστε έτοιμοι να μιλήσουμε για την λύση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης με την μέθοδο των δυναμοσειρών.

Ψάχνουμε λύσεις της μορφής

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

και υποθέτουμε ότι η σειρά συγκλίνει στο διάστημα $|x - x_0| < \rho$ για κάποιο $\rho > 0$. Την μορφή αυτή την αντικαθιστούμε στην εξίσωση και έπειτα προσπαθούμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές a_n .

Ορισμός 5 Έστω η διαφορική εξίσωση $L[y](t) = 0$ με p, q συνεχείς. Θα λέμε ότι ένα σημείο $x_0 \in R$ είναι ομαλό, αν οι συναρτήσεις p, q είναι αναλυτικές σε αυτό το σημείο.

Εδώ θα ασχοληθούμε με διαφορικές εξισώσεις για τις οποίες οι συντελεστές είναι αναλυτικές συναρτήσεις για κάθε $x \in R$ ή έστω για το σημείο που θέλουμε να αναπτύξουμε την λύση.

Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Να βρεθεί λύση σε μορφή σειράς για την εξίσωση

$$y'' + y = 0, -\infty < x < \infty.$$

Αναζητούμε μια λύση σε μορφή δυναμοσειράς γύρω από το $x_0 = 0$, δηλ.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

και υποθέτουμε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποιο διάστημα $|x| < \rho$. Παραγωγίζοντας κατά όρο έχουμε

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Αντικαθιστώντας στην διαφορική εξίσωση τα y, y' με τις σειρές που υπολογίσαμε έχουμε

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

Στο πρώτο άθροισμα, μετατοπίζουμε το δείκτη άθροισης αντικαθιστώντας το n με $n + 2$ και έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n]x^n = 0.$$

Για να ικανοποιείται η τελευταία εξίσωση πρέπει

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n = 0.$$

Η σχέση αυτή είναι μια αναδρομική σχέση. Στο παράδειγμα αυτό, υπολογίζονται χωριστά οι όροι με περιττό δείκτη από αυτούς με άρτιο δείκτη. Για τους συντελεστές με άρτιο δείκτη έχουμε

$$a_2 = -\frac{a_0}{2 \cdot 1} = -\frac{a_0}{2!}, a_4 = -\frac{a_0}{4!}, \dots$$

Δηλαδή, γενικά έχουμε

$$a_n = a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!} a_0, k = 1, 2, 3, \dots$$

Με περιττό δείκτη είναι εύκολο να δειχθεί ότι

$$a_n = a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} a_1, k = 1, 2, 3, \dots$$

Αφού υπολογίσαμε τους συντελεστές της δυναμοσειράς, ας δούμε πως γράφεται

$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Μπορούμε να δούμε ότι η πρώτη σειρά είναι το ανάπτυγμα *Taylor* της $\cos x$ γύρω από το $x_0 = 0$ και η δεύτερη είναι το ανάπτυγμα *Taylor* του $\sin x$ στο $x_0 = 0$. Άρα, όπως αναμενόταν, λαμβάνουμε τη λύση $y = a_0 \cos x + a_1 \sin x$. Αφού δεν επιβάλλονται συνθήκες στα a_0, a_1 , τα θεωρούμε αυθαίρετα.

◇

Σημείωση 4 Στο βιβλίο των *Thomas – Finney* στον δεύτερο τόμο, βρίσκει κανείς έναν πίνακα με ορισμένες συναρτήσεις και τις αντίστοιχες δυναμοσειρές στην σελ. 101.

Ας προχωρήσουμε σε ένα επόμενο παράδειγμα. Να βρεθεί μια λύση σε δυναμοσειρά του x της εξίσωσης

$$y'' - xy = 0, -\infty < x < \infty$$

Υποθέτουμε λοιπόν ότι η λύση γράφεται στη μορφή

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

και ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποιο διάστημα $|x| < \rho$. Έχουμε ήδη υπολογίσει την πρώτη και δεύτερη παράγωγο αυτής της δυναμοσειράς, οπότε δεν έχουμε παρα να την αντικαταστήσουμε στην εξίσωση. Έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n = x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}.$$

Κάνοντας μια μετατόπιση στον δείκτη άθροισης στο δεξι μέλος έχουμε

$$2 \cdot 1 a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n.$$

Επομένως θα πρέπει να ισχύει το εξής

$$\begin{aligned} a_2 &= 0, \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} &= a_{n-1}, n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Από την αναδρομική σχέση, εύκολα βλέπουμε ότι $a_5 = a_8 = a_{11} = \dots = 0$. Για την ακολουθία $a_0, a_3, a_6, \dots$ καταλήγουμε στην αναδρομική σχέση

$$a_3 = \frac{a_0}{2 \cdot 3}, a_6 = \frac{a_3}{5 \cdot 6} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6}, a_9 = \frac{a_6}{8 \cdot 9} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9}, \dots$$

Τα αποτελέσματα αυτά οδηγούν στον γενικό τύπο

$$a_{3n} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6(3n-4)(3n-3)(3n-1)(3n)}, n = 3, 4, \dots$$

Τέλος για την ακολουθία $a_1, a_4, a_7, \dots$ καταλήγουμε στην εξής αναδρομική σχέση

$$a_{3n+1} = \frac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \dots (3n-3)(3n-2)(3n)(3n+1)}, n = 3, 4, \dots$$

Η γενική λύση της εξίσωσης είναι λοιπόν

$$a_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{2 \cdot 3 \dots (3n-1)(3n)} \right] + a_1 \left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{2 \cdot 4 \dots (3n)(3n+1)} \right]$$

Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του λόγου μπορούμε να δούμε ότι οι δύο σειρές συγκλίνουν για όλα τα x . Έστω y_1 να είναι η συνάρτηση που ορίζεται στο πρώτο ζεύγος αγκυλών και y_2 από το δεύτερο ζεύγος αγκυλών. Αφού a_0, a_1 αυθαίρετες σταθερές, έπεται ότι y_1, y_2 είναι λύσεις η κάθεμιά ξεχωριστά. Μπορείτε, επίσης να

παρατηρήσετε ότι $y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0$ και $y_2(0) = 0, y_2'(0) = 1$. Άρα $W(y_1, y_2)(0) = 1 \neq 0$ και κατά συνέπεια οι y_1, y_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Άρα η γενική λύση της εξίσωσης είναι

$$y = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x), -\infty < x < \infty.$$

Λέμε ότι το σημείο x_0 είναι ομαλό της διαφορικής εξίσωσης, αν οι p, q είναι αναλυτικές σε αυτό το σημείο.

Θεώρημα 8 Αν x_0 είναι ένα ομαλό σημείο της διαφορικής εξίσωσης, η γενική λύση σε ένα διάστημα που περιέχει το x_0 είναι

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x),$$

όπου a_0, a_1 αυθαίρετες σταθερές και y_1, y_2 είναι δύο συναρτήσεις γραμμικά ανεξάρτητες και αναλυτικές στο x_0 . Επιπλέον, η ακτίνα σύγκλισης για κάθε μια από τις λύσεις σε σειρά y_1, y_2 είναι τουλάχιστο ίση με την ελάχιστη ακτίνα σύγκλισης των σειρών για τα p, q .

Παράδειγμα 28 Να δοθούν οι τέσσερις πρώτοι όροι του αναπτύγματος Taylor, γύρω από το 0, της λύσης της δ.ε.

$$\begin{aligned} y' &= x^2 + y^2, \\ y(0) &= 1. \end{aligned}$$

Λύση:

Η λύση σε δυναμοσειρά γύρω από το 0, γράφεται ως γνωστόν ως εξής

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

με $a_k = \frac{y^{(k)}(0)}{k!}$. Αυτό που έχουμε να κάνουμε είναι να υπολογίσουμε τις παραγώγους της $y(x)$ στο 0. Από την εξίσωση λοιπόν έχουμε

$$\begin{aligned} y'(x) &= x^2 + y^2 \Rightarrow y'(0) = 0 + y^2(0) = 1, \\ y''(x) &= 2x + 2yy' \Rightarrow y''(0) = 2, \\ y'''(x) &= 2 + 2y'y' + 2yy'' \Rightarrow y'''(0) = 8, \\ y^4(x) &= 4y'y'' + 2y'y'' + 2yy'' \Rightarrow y^4 = 28. \end{aligned}$$

Άρα οι τέσσερις πρώτοι όροι της λύσης δίνονται ως εξής

$$y(x) = 1 + x + x^2 + \frac{8}{3!}x^3 + \frac{28}{4!}x^4 + \dots$$

◇

Η βασική ιδέα λοιπόν, είναι να αντικαταστήσουμε στην εξίσωση, την άγνωστη συνάρτηση, με την αντίστοιχη δυναμοσειρά της. Βέβαια το ίδιο θα κάνουμε και με τις άλλες συναρτήσεις που παίρνουν μέρος στην διαφορική εξίσωση, μόνο που σε αυτές γνωρίζουμε τους συντελεστές των δυναμοσειρών τους. Μαζεύουμε όλους τους όρους σε μια σειρά και θα καταλήξουμε σε μια εξίσωση με αγνώστους τους συντελεστές της άγνωστης συνάρτησης.

Τέλος, αν μας δωθεί ένα πρόβλημα αρχικών τιμών με τις αρχικές συνθήκες στο σημείο x_0 θα πρέπει να αναπτύξουμε την λύση σε μια δυναμοσειρά με κέντρο το x_0 όπως και τις υπόλοιπες συναρτήσεις.

13 ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΕΠΙΛΥΣΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εξετάσουμε τον μετασχηματισμό *Laplace* ο οποίος είναι ένας ολοκληρωτικός μετασχηματισμός και θα δούμε πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες του στο να επιλύουμε διαφορικές εξισώσεις. Με τον μετασχηματισμό αυτό, μια διαφορική εξίσωση μετατρέπεται σε αλγεβρική. Η τελευταία είναι συνήθως πολύ εύκολο να επιλυθεί, το δύσκολο σημείο όμως είναι η αντιστροφή του μετασχηματισμού.

Ας δούμε όμως ποιός είναι αυτός ο μετασχηματισμός. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να μετασχηματίσουμε την συνάρτηση f . Ονομάζουμε F την μετασχηματισμένη η οποία είναι $F(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$.

Από αυτόν τον ορισμό καταλαβαίνουμε ότι το ολοκλήρωμα υπάρχει ακόμα και όταν η f αυξάνει εκθετικά, δηλ. αν $f(t) = e^{at}$ τότε το ολοκλήρωμα υπάρχει για όλα τα $s > a$. Στο άλλο άκρο του διαστήματος, δηλ. στο 0, η f επιτρέπεται να απειρίζεται με μικρότερη ταχύτητα από την $\frac{1}{t}$. Σε τέτοιες λοιπόν συναρτήσεις μπορεί ναδειχθεί ότι ορίζεται ο μετασχηματισμός *Laplace* καθώς και ο αντιστροφός του.

Από τον ορισμό του μετασχηματισμού μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι ο μετασχηματισμός είναι γραμμικός (αφήνεται σαν άσκηση). Το ίδιο συμβαίνει και με τον αντιστροφο του. Αυτές είναι οι δύο πρώτες ιδιότητες του μετασχηματισμού. Ας δούμε όμως ποιά είναι αυτή που τον κάνει να ξεχωρίζει. Ας συμβολίσουμε την μετασχηματισμένη και ως εξής: $\mathcal{L}\{f(t)\}$. Θα δείξουμε ότι ισχύει το εξής

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) = sF(s) - f(0).$$

Απόδειξη:

$$\mathcal{L}\{f'\} = \int_0^\infty e^{-st}f'(t)dt = \int_0^\infty e^{-st}df.$$

Δηλ. με παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε

$$\mathcal{L}\{f'\} = e^{-st}f(t) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty (e^{-st})'f(t)dt =$$

$$-f(0) + s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = sF(s) - f(0).$$

Για την δεύτερη παράγωγο έχουμε

$$\mathcal{L}\{f''\} = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0).$$

Η τελευταία ιδιότητα είναι ενδιαφέρουσα, διότι μπορεί μια διαφορική εξίσωση να μετατραπεί σε αλγεβρική με άγνωστη συνάρτηση την μετασχηματισμένη. Τότε το πρόβλημα ανάγεται στο να αντιστρέψουμε τον μετασχηματισμό. Ας το δούμε σε ένα παράδειγμα.

$$y'' + by = f(t), \\ y(0) = y_0, y'(0) = y_1.$$

Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό και στα δύο μέλη και έχουμε

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + bY(s) = F(s).$$

Η άγνωστη συνάρτηση εδώ είναι η $Y(s)$. Λύνουμε ως προς αυτή και έχουμε

$$Y(s) = \frac{F(s) + sy_0 + y_1}{b + s^2}.$$

Παρατηρήστε ότι έχουμε ήδη αντικαταστήσει τις αρχικές συνθήκες και γνωρίζουμε την μορφή της μετασχηματισμένης. Οπότε δεν έχουμε παρά να αντιστρέψουμε τον μετασχηματισμό και να βρούμε την y . Αυτό γενικά είναι ένα δύσκολο πρόβλημα. Παρόλα αυτά ένας εύκολος τρόπος είναι η κατασκευή ενός πίνακα με συναρτήσεις και τους μετασχηματισμούς των. Τότε χρησιμοποιώντας τον πίνακα αυτόν θα κοιτάμε μήπως η δική μας συνάρτηση βρίσκεται μέσα στις γνωστές συναρτήσεις του πίνακα. Ακόμη και αν δεν βρίσκεται αυτή καθάυτη ενδέχεται να μπορούμε να την γράψουμε σαν γραμμικό συνδυασμό συναρτήσεων με γνωστό μετασχηματισμό και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο αντίστροφος μετασχηματισμός είναι γραμμικός να υπολογίσουμε τελικά τον αντίστροφο. Ένας τέτοιος πίνακας βρίσκεται στο βιβλίο του Τραχανά σελ. 239.

Ας δούμε πρώτα ορισμένα παραδείγματα μετασχηματισμών. Έστω $f(t) = 1, t \geq 0$. Θα δούμε ποιος είναι ο μετασχηματισμός *Laplace*.

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}, s > 0.$$

Έστω $f(t) = e^{at}, t \geq 0$.

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt = \frac{1}{s-a}, s > a.$$

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να δούμε ότι $\mathcal{L}\{\sin(at)\} = \frac{a}{s^2+a^2}$, $s > 0$. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να κατασκευάσουμε τον πίνακα που αναφέραμε προηγούμενα. Έτσι λοιπόν αν η λύση της αλγεβρικής εξίσωσης ήταν $Y(s) = \frac{2}{s^2+4}$ τότε, από τα προηγούμενα, γνωρίζουμε ότι η $y(t) = \sin(2t)$ έχει τον παραπάνω μετασχηματισμό και άρα είναι η λύση της διαφορικής εξίσωσης που ξεκινήσαμε να επιλύουμε.

Ας εφαρμόσουμε τώρα αυτά που είπαμε στο εξής πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{aligned}y'' - y' - 2y &= 0, \\ y(0) &= 1, y'(0) = 0.\end{aligned}$$

Ως γνωστόν, εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό και στα δύο μέλη, δηλ.

$$\mathcal{L}\{y''\} - \mathcal{L}\{y'\} - 2\mathcal{L}\{y\} = 0,$$

σημειώστε, ότι χρησιμοποιήσαμε την γραμμικότητα του μετασχηματισμού. Με βάση αυτά που έχουμε πει για τις ιδιότητες του μετασχηματισμού, έχουμε,

$$\begin{aligned}s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) - [s\mathcal{L}\{y\} - y(0)] - 2\mathcal{L}\{y\} &= 0, \Rightarrow \\ (s^2 - s - 2)Y(s) + (1 - s)y(0) - y'(0) &= 0.\end{aligned}$$

Λύνοντας ως προς Y έχουμε

$$Y(s) = \frac{s-1}{(s-2)(s+1)}.$$

Έχουμε υπολογίσει λοιπόν την Y και τώρα δεν έχουμε παρά να βρούμε ποιά είναι η y που αν την μετασχηματίσουμε να μας δώσει την Y . Θα προσπαθήσουμε να γράψουμε την Y σαν άθροισμα συναρτήσεων με γνωστό μετασχηματισμό. Δηλ. Θέλουμε να βρούμε τα a, b τέτοια ώστε

$$\frac{s-1}{(s-2)(s+1)} = \frac{a}{s-2} + \frac{b}{s+1}.$$

Κάνοντας τους υπολογισμούς βρίσκουμε ότι $a = \frac{1}{3}, b = \frac{2}{3}$. Από τον πίνακα μετασχηματισμών, γνωρίζουμε ότι $\mathcal{L}\{\frac{1}{3}e^{2t}\} = \frac{1}{3(s-2)}$ και $\mathcal{L}\{\frac{2}{3}e^{-t}\} = \frac{2}{3(s+1)}$, επομένως η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$y(t) = \frac{1}{3}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{-t}.$$

Παράδειγμα 29 Να βρεθεί η λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\begin{aligned}y'' + y &= \sin(2t), \\ y(0) &= 2, y'(0) = 1.\end{aligned}$$

Λύση: Παίρνουμε τον μετασχηματισμό και στα δύο μέλη και έχουμε

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = \frac{2}{s^2 + 4},$$

εδώ χρησιμοποιήσαμε τον πίνακα για να βρούμε τον μετασχηματισμό του $\sin(2t)$. Ανικαθιστώντας τις αρχικές συνθήκες και λύνοντας ως προς Y έχουμε

$$Y(s) = \frac{2s^3 + s^2 + 8s + 6}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}.$$

Εύκολα λοιπόν υπολογίσαμε την Y αλλά μένει να κάνουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό. Πρέπει να βρούμε τα a, b τέτοια ώστε

$$Y(s) = \frac{as + b}{s^2 + 1} + \frac{cs + d}{s^2 + 4}.$$

Κάνοντας τους υπολογισμούς έχουμε $a = 2, c = 0, b = \frac{5}{3}, d = -\frac{2}{3}$ και κοιτώντας τον πίνακα μετασχηματισμών έχουμε ότι η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$y(t) = 2\cos t + \frac{5}{3}\sin t - \frac{1}{3}\sin(2t).$$

Θα συνεχίσουμε με μερικές ιδιότητες ακόμη του μετασχηματισμού. Για παράδειγμα ισχύει το εξής:

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = \left(-\frac{d}{ds}\right)^n F(s).$$

Δηλ. αν γνωρίζουμε τον μετασχηματισμό μιας συνάρτησης f τότε γνωρίζουμε και τον μετασχηματισμό του γινομένου της επί μια δύναμη του t (ακέραια δύναμη).

Άλλη μια ιδιότητα, είναι η εξής:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t) dt\right\} = \frac{1}{s} F(s).$$

Αυτή μας λέει ουσιαστικά ότι αν γνωρίζουμε τον μετασχηματισμό της f τότε γνωρίζουμε και τον μετασχηματισμό του ολοκληρωματός της.

Επίσης, ισχύει το εξής:

$$\mathcal{L}\{f(t - a)\} = e^{-as} F(s) \text{ και } \mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s - a).$$

Ορισμός 6 Έστω οι συναρτήσεις f_1, f_2 . Ονομάζουμε *συνέλιξη το ολοκλήρωμα*

$$\int_0^t f_1(t - t') f_2(t') dt',$$

και συμβολίζεται με $f_1 * f_2$.

Μια τελευταία ιδιότητα του μετασχηματισμού είναι η εξής

$$\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)F_2(s)\} = \int_0^t f_1(t-t')f_2(t')dt',$$

και είναι γνωστό σαν **Θεώρημα συνέλιξης** (όπου F_1, F_2 οι μετασχηματισμοί των f_1, f_2).
Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 30 Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός της $F(s) = \frac{1}{s(s+1)}$.

Λύση:

Θα χρησιμοποιήσουμε το **Θεώρημα** της συνέλιξης. Η F μπορεί να γραφεί σαν γινόμενο δύο συναρτήσεων με γνωστούς μετασχηματισμούς, δηλ. $F(s) = F_1(s)F_2(s)$ με $F_1(s) = \frac{1}{s}$, $F_2(s) = \frac{1}{s+1}$. Από τον πίνακα γνωρίζουμε ότι

$$f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1, f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = e^{-t}.$$

Επομένως, εφαρμόζοντας το **Θεώρημα** της συνέλιξης για τις f_1, f_2, F_1, F_2 έχουμε ότι

$$\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)F_2(s)\} = f_1 * f_2 = \int_0^t 1e^{-t'}dt' = -e^{-t'} \Big|_0^t = 1 - e^{-t}.$$

Μπορεί κανείς να το επιβεβαιώσει βέβαια και με τον τρόπο που γνωρίζουμε, δηλ. να γράψουμε την F σαν άθροισμα κλασμάτων.

Παράδειγμα 31 Να βρεθούν οι μετασχηματισμοί των εξής συναρτήσεων

- 1) $t^2 e^{-3t}$
- 2) $\cos^2 t$
- 3) $e^{3t} \cos(2t)$
- 4) $te^{-2t} \cos(3t)$

Λύση:

1) Για την πρώτη παρατηρούμε ότι είναι το γινόμενο μιας ακέραιας δύναμης του t επί μια συνάρτηση με γνωστό μετασχηματισμό. Θα χρησιμοποιήσουμε λοιπόν την αντίστοιχη ιδιότητα.

$$\mathcal{L}\{t^2 e^{-3t}\}(s) = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2}(\mathcal{L}\{e^{-3t}\}(s)) = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s+3}\right) = \frac{2}{(s+3)^3}$$

2) Γνωρίζουμε τον μετασχηματισμό της $\cos t$ και όχι της $\cos^2 t$ για αυτό θα χρησιμοποιήσουμε μια γνωστή ταυτότητα για να το αποφύγουμε αυτό. Γνωρίζουμε ότι

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos(2t)}{2}.$$

Επομένως μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\cos^2 t\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t)\right\} = \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{1\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{\cos(2t)\} = \frac{1}{2s} + \frac{s}{2(s^2 + 4)}\end{aligned}$$

3) Εδώ έχουμε ένα γινόμενο συνάρτησης με γνωστό μετασχηματισμό επί την εκθετική. Μπορούμε λοιπόν να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της μετατόπισης. Άρα

$$\mathcal{L}\{e^{3t}f(t)\} = F(s - 3),$$

με $f(t) = \cos(2t)$ και $F(s)$ ο μετασχηματισμός της, δηλ. $F(s) = \mathcal{L}\{\cos(2t)\} = \frac{s}{s^2 + 4}$. Άρα η απάντηση είναι $\mathcal{L}\{e^{3t}\cos(2t)\} = \frac{s-3}{(s-3)^2 + 4}$.

4) Εδώ έχουμε γινόμενο μιας συνάρτησης με γνωστό μετασχηματισμό (την $e^{-2t}\cos(3t)$) επί μια δύναμη του t . Ας δούμε πρώτα ποιός είναι ο μετασχηματισμός της $e^{-2t}\cos(3t)$. Όπως προηγούμενα, μπορούμε να υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό και έχουμε

$$\mathcal{L}\{e^{-2t}\cos(3t)\} = \frac{s + 2}{(s + 2)^2 + 9}.$$

Χρησιμοποιώντας τώρα και την ιδιότητα με την παράγωγο του μετασχηματισμού, έχουμε

$$\mathcal{L}\{te^{-2t}\cos(3t)\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{s + 2}{(s + 2)^2 + 9}\right) = \frac{(s + 2)^2 - 9}{((s + 2)^2 + 9)^2}.$$

◇

Παράδειγμα 32 Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός των συναρτήσεων

$$1) F(s) = \frac{s + 1}{s^2 + 2s},$$

$$2) F(s) = \frac{2s + 3}{(s - 1)(s^2 + 2s + 5)}.$$

Λύση:

1) Έχουμε μια ρητή συνάρτηση και θα χρησιμοποιήσουμε την γραμμικότητα του μετασχηματισμού. Θα γράψουμε δηλ. την συνάρτηση σαν άθροισμα δύο κλασμάτων. Οπότε

$$F(s) = \frac{s + 1}{s(s + 2)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s + 2}.$$

Κάνοντας τους υπολογισμούς έχουμε ότι $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$ και επομένως

$$F(s) = \frac{1}{2s} + \frac{1}{2(s + 2)}.$$

Όμως γνωρίζουμε ότι $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$, $\mathcal{L}\{\frac{1}{s+2}\} = e^{-2t}$, άρα ο αντίστροφος είναι $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t}$.

2) Επίσης σε αυτή την περίπτωση θα γράψουμε την συνάρτηση σαν άθροισμα κλασμάτων. Δηλ.

$$F(s) = \frac{2s+3}{(s-1)(s^2+2s+5)} = \frac{a}{s-1} + \frac{bs+c}{s^2+2s+5},$$

και κάνοντας τους υπολογισμούς έχουμε $a = \frac{5}{8}$, $b = -\frac{5}{8}$, $c = \frac{1}{8}$. Άρα θα πρέπει να βρούμε τον αντίστροφο των συναρτήσεων $\frac{5}{8(s-1)}$, $\frac{1}{8} \frac{-5s+1}{s^2+2s+5}$. Για την πρώτη συνάρτηση είναι εύκολο, ο αντίστροφος είναι $\frac{5}{8}e^t$. Για την δεύτερη είναι λίγο πιο πολύπλοκα τα πράγματα. Θα γράψουμε το πολυώνυμο $s^2+2s+5 = (s+1)^2+4$ και την συνάρτηση θα προσπαθήσουμε να την γράψουμε έτσι ώστε να φαίνεται η μετατόπιση κατά -1 . Δηλ.

$$\frac{-5s+1}{s^2+2s+5} = \frac{-5(s+1)+6}{(s+1)^2+4} = -5 \frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} + 3 \frac{2}{(s+1)^2+2^2}.$$

Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-5(s+1)+6}{(s+1)^2+4}\right\} &= -5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2}\right\} + 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)^2+2^2}\right\} = \\ &= e^{-t}[-5\cos(2t) + 3\sin(2t)]. \end{aligned}$$

Άρα τελικά η απάντηση είναι ότι ο αντίστροφος είναι $\frac{5}{8}e^t + \frac{1}{8}e^{-t}(-5\cos(2t) + 3\sin(2t))$.

◇

14 ΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΜΕ ΤΟ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟ LAPLACE

Σε αυτή την ενότητα, θα εξετάσουμε την επίλυση συστημάτων γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές με τον μετασχηματισμό Laplace. Ας δούμε πρώτα, τι είναι σύστημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων. Ας πάρουμε το εξής πρόβλημα:

Να βρεθούν οι συναρτήσεις y, z τέτοιες ώστε

$$\begin{aligned} y' + z &= x, \\ z' + 4y &= 0, \\ y(0) &= 1, z(0) = -1 \end{aligned}$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι σε κάθε εξίσωση εμπλέκονται και οι δύο συναρτήσεις και έτσι δεν είναι καθόλου προφανές πως θα πρέπει να αντιμετωπίσουμε αυτή την περίπτωση. Αν όμως θυμηθούμε ποιά είναι η βασική ιδιότητα του μετασχηματισμού

Laplace (μετατρέπει τις διαφορικές εξισώσεις σε αλγεβρικές) θα διαπιστώσουμε ότι αυτή είναι μια κατάλληλη μέθοδος για το πρόβλημά μας. Θα μετατρέψουμε τις δύο διαφορικές εξισώσεις σε αλγεβρικές και έπειτα θα επιλύσουμε το γραμμικό σύστημα. Βέβαια παραμένει το δύσκολο πρόβλημα του αντιστρόφου αλλά τουλάχιστον αντιμετωπίσαμε ένα νέο τύπου προβλήματος με το υπάρχον μαθηματικό υπόβαθρο. Ας δούμε λοιπόν πως ακριβώς γίνεται.

Παίρνουμε τον μετασχηματισμό και στα δύο μέλη. Έχουμε

$$\begin{aligned} [sY(s) - 1] + Z(s) &= \frac{1}{s^2}, \\ [sZ(s) + 1] + 4Y(s) &= 0, \end{aligned}$$

ως γνωστόν αντικαταστήσαμε τις αρχικές συνθήκες κατευθείαν. Συνεχίζουμε,

$$\begin{aligned} sY(s) + Z(s) &= \frac{s^2 + 1}{s^2}, \\ 4Y(s) + sZ(s) &= -1. \end{aligned}$$

Τώρα έχουμε ένα αλγεβρικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους. Είναι γνωστή η διαδικασία από την γραμμική άλγεβρα. Λύνοντας λοιπόν το γραμμικό σύστημα έχουμε

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s^2 + s + 1}{s(s^2 - 4)}, \\ Z(s) &= -\frac{s^3 + 4s^2 + 4}{s^2(s^2 - 4)} \end{aligned}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την γνωστή τεχνική για την αντιστροφή των δύο συναρτήσεων, θα γράψουμε τα κλάσματα σαν άθροισμα απλών κλασμάτων. Δηλ.

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s^2 + s + 1}{s(s^2 - 4)} = -\frac{\frac{1}{4}}{s} + \frac{\frac{7}{8}}{s - 2} + \frac{\frac{3}{8}}{s + 2} \Rightarrow \\ y(x) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = -\frac{1}{4} + \frac{7}{8}e^{2x} + \frac{3}{8}e^{-2x}. \end{aligned}$$

Κάνοντας το ίδιο και για την Z έχουμε ότι $z(x) = \mathcal{L}^{-1}\{Z(s)\} = x - \frac{7}{4}e^{2x} + \frac{3}{4}e^{-2x}$.

◇

Θα πρέπει να είναι κατανοητό, ότι μπορούμε να επιλύουμε συστήματα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με όσες άγνωστες συναρτήσεις θέλουμε, αρκεί να γνωρίζουμε την επίλυση αλγεβρικών συστημάτων n εξισώσεων με n αγνώστους. Ας δούμε ένα παράδειγμα με τρεις άγνωστες συναρτήσεις.

Παράδειγμα 33 Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} w' + y &= \sin x, \\ y' - z &= e^x, \\ z' + w + y &= 1, \\ w(0) &= 0, y(0) = 1, z(0) = 1. \end{aligned}$$

Λύση: Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό και στις τρεις εξισώσεις και έχουμε αφού αντικαταστήσουμε και τις αρχικές συνθήκες

$$\begin{aligned}(sW(s) - 0) + Y(s) &= \frac{1}{s^2 + 1}, \\ (sY(s) - 1) - Z(s) &= \frac{1}{s - 1}, \\ (sZ(s) - 1) + W(s) + Y(s) &= \frac{1}{s}.\end{aligned}$$

Λύνουμε το αλγεβρικό αυτό σύστημα και έχουμε

$$W(s) = \frac{-1}{s(s-1)}, \quad Y(s) = \frac{s^2 + s}{(s-1)(s^2 + 1)}, \quad Z(s) = \frac{s}{s^2 + 1}.$$

Θα αναλύσουμε τα κλάσματα σε πιο στοιχειώδη

$$\begin{aligned}W(s) &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1}, \\ Y(s) &= \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s^2 + 1}.\end{aligned}$$

Τώρα είναι εύκολο να υπολογίσουμε τους αντιστρόφους.

$$\begin{aligned}w(x) &= \mathcal{L}^{-1}\{W(s)\} = 1 - e^x, \\ y(x) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = e^x + \sin x, \\ z(x) &= \mathcal{L}^{-1}\{Z(s)\} = \cos x.\end{aligned}$$

◇

Βέβαια, μπορεί να βρεθούμε μπροστά σε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων όχι κατ'ανάγκη πρώτης τάξης για κάθε άγνωστη συνάρτηση. Η μεθοδολογία όμως είναι η ίδια. Ας δούμε μερικά τέτοια παραδείγματα.

Παράδειγμα 34 Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned}y'' + z + y &= 0, \\ z' + y' &= 0, \\ y(0) = 0, y'(0) = 0, z(0) &= 1.\end{aligned}$$

Λύση: Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό και στις δύο εξισώσεις, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα του μετασχηματισμού για την δεύτερη παράγωγο μιας συνάρτησης και τέλος αντικαθιστώντας τις αρχικές συνθήκες έχουμε

$$\begin{aligned}s^2 Y(s) + Z(s) + Y(s) &= 0, \\ sZ(s) - 1 + sY(s) &= 0.\end{aligned}$$

Η διαδικασία από εδώ και στο εξής είναι εύκολη. Λύνουμε το αλγεβρικό σύστημα και έπειτα αντιστρέφουμε τον μετασχηματισμό. Η λύση του συστήματος μας δίνει

$$Y(s) = -\frac{1}{s^3}, \quad Z(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^3}.$$

Χρησιμοποιώντας τον πίνακα με τους μετασχηματισμούς έχουμε τελικά

$$y(x) = -\frac{1}{2}x^2, \quad z(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2.$$

◇

Η λύση συστημάτων διαφορικών εξισώσεων είναι πολύ χρήσιμη στην επίλυση συνήθων διαφορικών εξισώσεων ανώτερης τάξης. Είναι γνωστό, ότι μια συνήθης διαφορική, τέταρτης τάξης για παράδειγμα, μπορεί να μετατραπεί σε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Ας δούμε πως γίνεται αυτό σε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 35 Να μετατραπεί η επόμενη διαφορική εξίσωση τέταρτης τάξης, σε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης,

$$y^4 = e^t y'' - e^{2t} y' + 5, \\ y(1) = 2, \quad y'(1) = 3, \quad y''(1) = 4, \quad y'''(1) = 5.$$

Λύση: Για να το κάνουμε αυτό θα ορίσουμε 4 καινούριες συναρτήσεις x_1, x_2, x_3, x_4 (όσες δηλ. και ο βαθμός της διαφορικής) έτσι ώστε να ισχύει το εξής

$$x_1 = y, \quad x_2 = y', \quad x_3 = y'', \quad x_4 = y''' \Rightarrow \\ x_2 = x_1', \quad x_3 = x_2', \quad x_4 = x_3'.$$

Μέχρι τώρα έχουμε τρεις σχέσεις που συνδέουν τις άγνωστες συναρτήσεις μεταξύ τους (δηλ. τις x_1, x_2, x_3, x_4). Χρειαζόμαστε άλλη μια. Προφανώς θα την πάρουμε από την διαφορική εξίσωση. Έχουμε λοιπόν

$$x_4' = e^t x_3 - e^{2t} x_2 + 5.$$

Καταλήξαμε λοιπόν σε 4 εξισώσεις με 4 άγνωστες συναρτήσεις. Ας τις γράψουμε όλες, μαζί με τις αρχικές συνθήκες

$$x_2 = x_1', \\ x_3 = x_2', \\ x_4 = x_3', \\ x_4' = e^t x_3 - e^{2t} x_2 + 5, \\ x_1(1) = 2, \quad x_2(1) = 3, \quad x_3(1) = 4, \quad x_4(1) = 5.$$

Δυστυχώς, αν χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό *Laplace* θα μετατραπεί βέβαια σε μια αλγεβρική εξίσωση, όμως θα παρουσιαστούν ορισμένες μετατοπίσεις

στις άγνωστες συναρτήσεις λόγω της ύπαρξης των εκθετικών (ας θυμηθούμε τις ιδιότητες του μετασχηματισμού). Αν όμως οι συντελεστές της διαφορικής εξίσωσης ήταν σταθεροί δεν θα είχαμε κανένα πρόβλημα και θα επιλύαμε απλώς ένα γραμμικό σύστημα 4 εξισώσεων με 4 αγνώστους και έπειτα θα αντιστρέφαμε τις τέσσερις συναρτήσεις.

◇

15 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΕΡΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τις λεγόμενες μερικές διαφορικές εξισώσεις. Λέμε ότι μια διαφορική εξίσωση είναι μερική διαφορική εξίσωση όταν η άγνωστη συνάρτηση, είναι μια συνάρτηση δύο ή εν γένει n μεταβλητών και στην εξίσωση παίρνουν μέρος οι μερικές παράγωγοι της άγνωστης συνάρτησης. Ας δούμε ποιά είναι η μορφή μιας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης.

Έστω $A(x, y), B(x, y), C(x, y), F(x, y)$ συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών ορισμένες σε ένα μη κενό, ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του R^2 . Ανοικτό ονομάζουμε ένα υποσύνολο του R^2 όταν για κάθε στοιχείο του υπάρχει μια περιοχή η οποία ανήκει στο χωρίο, ενώ συνεκτικό όταν για κάθε δύο στοιχεία η γραμμή που τα ενώνει ανήκει στο χωρίο (δεν υπάρχουν δηλαδή "τρύπες" στο χωρίο). Τότε μια γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης έχει την εξής μορφή:

$$Az_x + Bz_y + Cz = F.$$

Θα υποθέσουμε ότι κάποια από τις δύο συναρτήσεις A, B δεν μηδενίζεται πουθενά στο χωρίο $\Omega \subseteq R^2$. Αν, $F = 0$ τότε η παραπάνω εξίσωση ονομάζεται ομογενής αλλιώς μη ομογενής. Το πρόβλημα λοιπόν είναι να βρεθεί μια συνάρτηση z με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης έτσι ώστε να ικανοποιεί την εξίσωση. Μπορούμε να θεωρήσουμε τον διαφορικό τελεστή L που ορίζεται ως εξής:

$$L[z] = Az_x + Bz_y + Cz,$$

αρκεί η συνάρτηση όρισμα να έχει συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης. Είναι εύκολο να δούμε ότι ο διαφορικός αυτός τελεστής είναι γραμμικός, δηλαδή

$$L[c_1 z_1 + c_2 z_2] = c_1 L[z_1] + c_2 L[z_2].$$

Άρα ο γραμμικός συνδυασμός δύο λύσεων της ομογενούς εξίσωσης είναι επίσης λύση.

Ας θεωρήσουμε τώρα την εξής γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης.

$$a(r, p)z_r + c(r, p)z = f, \quad (24)$$

όπου a, c, f συνεχείς συναρτήσεις των μεταβλητών r, p σε ένα χωρίο Ω και ας υποθέσουμε ότι $a(r, p) \neq 0$ για όλα τα $(r, p) \in \Omega$. Υποθέτουμε ότι αυτές οι συναρτήσεις έχουν συνεχείς παραγώγους πρώτης τάξης στην δεύτερη μεταβλητή και έστω ένα σημείο r_0 . Τότε όλες οι λύσεις της ομογενούς δίνονται από τον εξής τύπο:

$$z(r, p) = h(p) e^{-\int_{r_0}^r \frac{c(t, p)}{a(t, p)} dt}, \quad (r, p) \in \Omega,$$

όπου h μια αυθαίρετη συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση.

Επίσης, μια μερική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης είναι η εξής:

$$z(r, p) = \left(\int_{r_0}^r \frac{f(s, p)}{a(s, p)} e^{\int_{r_0}^s \frac{c(t, p)}{a(t, p)} dt} ds \right) e^{-\int_{r_0}^r \frac{c(t, p)}{a(t, p)} dt}, \quad (r, p) \in \Omega.$$

Όλες οι λύσεις λοιπόν της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (24) δίνονται από το άθροισμα μιας μερικής λύσης της μη ομογενούς με τις λύσεις της ομογενούς, δηλ.

$$z(r, p) = \left(h(p) + \int_{r_0}^r \frac{f(s, p)}{a(s, p)} e^{\int_{r_0}^s \frac{c(t, p)}{a(t, p)} dt} ds \right) e^{-\int_{r_0}^r \frac{c(t, p)}{a(t, p)} dt}, \quad (r, p) \in \Omega.$$

Αυτή η συγκεκριμένη μορφή, όπως θα δούμε, παίζει σπουδαίο ρόλο στην επίλυση των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης, διότι με έναν κατάλληλο μετασχηματισμό μπορούμε να μετασχηματίσουμε την διαφορική μας εξίσωση στην μορφή (24).

Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι $A(x, y) \neq 0$ για όλα τα $(x, y) \in \Omega$. Θεωρούμε την εξής συνήθη διαφορική εξίσωση

$$y' = \frac{B(x, y)}{A(x, y)},$$

και ας υποθέσουμε ότι οι λύσεις της δίνονται από την εξής σχέση

$$\omega(x, y) = d,$$

όπου d μια αυθαίρετη σταθερά και ω είναι μια συνάρτηση με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης στο χωρίο Ω και επιπλέον $\omega_y(x, y) \neq 0$ για όλα τα $(x, y) \in \Omega$.

Θεωρούμε τον εξής μετασχηματισμό

$$r = x, \quad p = \omega(x, y).$$

Αυτός ο μετασχηματισμός είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφος δίνεται ως εξής

$$x = u_1(r, p), \quad y = u_2(r, p),$$

με u_1, u_2 τέτοιες ώστε να έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους.

Θέτουμε τώρα $a(r, p) = A(u_1(r, p), u_2(r, p))$, $c(r, p) = C(u_1(r, p), u_2(r, p))$ και $f(r, p) = F(u_1(r, p), u_2(r, p))$. Θυμηθείτε ότι $\omega(x, y) = d$ οπότε ισχύει το εξής $\omega_x dx + \omega_y dy = 0$ που σημαίνει $y' = -\frac{\omega_x}{\omega_y}$. Άρα, έχουμε $-\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{B}{A} \Rightarrow A\omega_x + B\omega_y = 0$.

Από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$z_x = z_r + z_p \omega_x, \quad z_y = z_p \omega_y.$$

Άρα η αρχική εξίσωση γίνεται

$$az_r + cz = f,$$

όπου τα δεδομένα της τελευταίας εξίσωσης ικανοποιούν τις υποθέσεις της εξίσωσης (24). Τώρα τα πράγματα είναι εύκολα, διότι γνωρίζουμε την λύση της τελευταίας εξίσωσης και δεν έχουμε παρά να αντιστρέψουμε τον μετασχηματισμό.

Είχαμε υποθέσει ότι $A(x, y) \neq 0$. Αν δεν συμβαίνει αυτό, τότε θα έχουμε $B(x, y) \neq 0$ για όλα τα $(x, y) \in \Omega$. Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε την εξής διαφορική εξίσωση

$$\frac{dx}{dy} = \frac{A(x, y)}{B(x, y)},$$

και υποθέτουμε ότι οι λύσεις της δίνονται από την σχέση

$$\omega(x, y) = d,$$

με ω όπως πριν και $\omega_x \neq 0$ για όλα τα $(x, y) \in \Omega$. Τότε ορίζουμε τον εξής μετασχηματισμό

$$r = \omega(x, y), \quad p = y,$$

ο οποίος μετασχηματίζει την διαφορική εξίσωση στην εξής μορφή

$$bz_p + cz = f,$$

η οποία έχει λύση παρόμοια με την προηγούμενη, αρκεί να εναλλάξουμε τους ρόλους των r, p .

Ας δώσουμε μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 36 Να επιλυθεί η μερική διαφορική εξίσωση

$$kz_x + lz_y + mz = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

με k, l, m σταθερές και $k \neq 0$.

Λύση: Αφού $k \neq 0$ τότε θα πρέπει να λύσουμε την εξής συνήθη διαφορική εξίσωση

$$y' = \frac{l}{k},$$

όπου οι λύσεις δίνονται από την σχέση

$$lx - ky = d.$$

Τώρα κάνουμε τον εξής μετασχηματισμό

$$r = x, \quad p = lx - ky,$$

οπότε η εξίσωση μετασχηματίζεται στην

$$kz_r + mz = 0, \quad (r, p) \in \mathbb{R}^2.$$

Οι λύσεις της τελευταίας εξίσωσης είναι

$$z(r, p) = h(p)e^{\int_0^r \frac{m}{k} dt} = e^{-\frac{m}{k}r}h(p), \quad (r, p) \in \mathbb{R}^2,$$

όπου h μια αυθαίρετη συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό έχουμε

$$z(x, y) = e^{-\frac{m}{k}x}h(lx - ky), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

◇

Παράδειγμα 37 Να επιλυθεί η μερική διαφορική εξίσωση

$$yz_x - xz_y + y^3xz = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y > 0.$$

Λύση: Αφού $y \neq 0$ θα λύσουμε την εξής συνήθη διαφορική εξίσωση

$$y' = -\frac{x}{y},$$

της οποίας οι λύσεις δίνονται από τον εξής τύπο

$$x^2 + y^2 = d.$$

Θεωρούμε λοιπόν τον εξής μετασχηματισμό

$$r = x, \quad p = x^2 + y^2.$$

Από τον μετασχηματισμό έχουμε ότι $y = \sqrt{p - r^2}$, αφού $y > 0$ και $x = r$. Ο συντελεστής λοιπόν του z_r θα είναι $\sqrt{p - r^2}$, ενώ ο συντελεστής του z θα είναι $r\sqrt{p - r^2}^3$. Άρα βγάζοντας κοινό παράγοντα την ποσότητα $\sqrt{p - r^2}$ η εξίσωση γίνεται τελικά

$$z_r + r(p - r^2)z = 0, \quad r \in \mathbb{R}, \quad p > 0.$$

Οι λύσεις δίνονται από την σχέση

$$z(r, p) = h(p)e^{-\int_0^r t(p - t^2)dt} = h(p)e^{\frac{r^4 - 2r^2p}{4}}, \quad r \in \mathbb{R}, \quad p > 0.$$

Άρα οι λύσεις της αρχικής μας εξίσωσης είναι

$$z(x, y) = h(x^2 + y^2)e^{\frac{-x^2(x^2 + 2y^2)}{4}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y > 0.$$

Παράδειγμα 38 Να επιλυθεί η μερική διαφορική εξίσωση

$$xyz_x - y^2 z_y - xz = 0, \quad x \in R, \quad y > 0.$$

Λύση:

Εδώ ο δευτερος συντελεστής είναι διάφορος του μηδέν, άρα θα πρέπει να επιλύσουμε την εξής συνήθη διαφορική εξίσωση

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{xy}{y^2},$$

της οποίας οι λύσεις δίνονται από την σχέση $xy = d$. Κάνουμε λοιπόν τον μετασχηματισμό

$$r = xy, \quad p = y,$$

και η εξίσωση μας γίνεται

$$p^3 z_r + rz = 0, \quad r \in R, \quad p > 0.$$

Όλες οι λύσεις δίνονται από την σχέση

$$z(r, p) = h(r) e^{\frac{r}{2p^2} - \frac{r}{p}}, \quad r \in R, \quad p > 0.$$

Αντιστρέφοντας τώρα τον μετασχηματισμό και θέτοντας $H(r) = h(r) e^{\frac{r}{p^2}}$ τότε η λύση της αρχικής διαφορικής εξίσωσης γίνεται

$$z(x, y) = e^{\frac{x}{2y}} H(xy), \quad x \in R, \quad p > 0.$$

◇

Παράδειγμα 39 Να επιλυθεί η μερική διαφορική εξίσωση

$$z_x - 2z_y + z = ye^{-x}, \quad (x, y) \in R^2.$$

Λύση:

Αφού ο συντελεστής του z_x είναι διάφορος του μηδέν, τότε θα πρέπει να επιλύσουμε την εξής διαφορική εξίσωση

$$y' = -2,$$

της οποίας οι λύσεις δίνονται από την εξής σχέση

$$2x + y = d,$$

και έτσι θα κάνουμε τον μετασχηματισμό $r = x$, $p = 2x + y$ ο οποίος μετασχηματίζει την εξίσωση, στην εξής

$$z_r + z = (p - 2r)e^{-r}, \quad (r, p) \in R^2.$$

Οι λύσεις αυτής της εξίσωσης είναι

$$z(r, p) = e^{-r}h(p) + r(p - r)e^{-r},$$

και οι λύσεις της αρχικής εξίσωσης είναι

$$z(x, y) = e^{-x}h(2x + y) + x(x + y)e^{-x}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

◇

Παράδειγμα 40 Να βρεθεί η λύση z της μερικής διαφορικής εξίσωσης

$$xyz_x - y^2 z_y - xz = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y > 0,$$

η οποία πληροί την συνθήκη $z(x, 1) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}$.

Λύση:

Οι λύσεις της εξίσωσης δίνονται από τον τύπο

$$z(x, y) = e^{\frac{x}{2y}} H(xy), \quad x \in \mathbb{R}, \quad y > 0.$$

Θα πρέπει να διαλέξω τώρα μια H έτσι ώστε

$$z(x, 1) = e^{\frac{x}{2}} H(x) = x^2 \text{ για όλα τα } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα η συνάρτηση H θα είναι

$$H(u) = u^2 e^{-\frac{u}{2}}, \quad u \in \mathbb{R},$$

και άρα η λύση θα δίνεται από την εξής σχέση

$$z(x, y) = x^2 y^2 e^{\frac{x}{2y} - \frac{xy}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y > 0.$$

◇.