Un tour d'horizon des méthodes de sommabilité dans les espaces de fonctions

Pierre-Olivier Parisé & Thomas Ransford

Résumé

Au 19ième siècle, Joseph Fourier pensait que toute fonction périodique pouvait s'exprimer comme sa série de Fourier. Cependant, près de 60 ans plus tard, Paul du Bois-Reymond soulève un problème à la thèse de Joseph Fourier. Il démontre qu'il existe une fonction continue périodique dont la série de Fourier diverge en un point. Autrement dit, il a montré qu'une série de Fourier ne converge pas toujours. Elle n'égale donc pas la valeur de la fonction qu'on tente d'exprimer. Heureusement, Lipót Fejér a corrigé ce petit problème en considérant la méthode de sommabilité de Cesàro. Cette méthode a permis de faire converger uniformément la série de Fourier de toute fonction périodique et continue. Ce dernier résultat est un exemple célèbre montrant comment la théorie de la sommabilité peut être utilisée afin de corriger des séries divergentes de fonctions et d'approximer des fonctions d'un espace donné.

Dans cet exposé, nous allons présenter d'autres types d'espaces de fonctions où la théorie de la sommabilité joue un rôle important pour l'approximation des éléments de l'espace par des polynômes. Dans la première partie de l'exposé, nous allons présenter quelques notions clés de la théorie de la sommabilité et quelques méthodes de sommabilité telles que les méthodes de Cesàro, d'Abel et la méthode logarithmique. La deuxième partie de l'exposé est réservée aux résultats de sommabilité pour d'autres types d'espaces de fonctions. Nous y verrons en particulier un résultat similaire à celui de Fejér pour les espaces de Dirichlet à poids et un résultat très surprenant pour les espaces de de Branges-Rovnyak sur le disque unité.

A tour of summability methods in function spaces

Pierre-Olivier Parisé & Thomas Ransford

Abstract

In the 19th century, Joseph Fourier thought that any periodic function could be expressed as its Fourier series. However, more than 60 years later, Paul du Bois-Reymond raised a problem with Joseph Fourier's thesis. He showed that there is a continuous and periodic function whose Fourier series diverges at a point. In other words, he showed that a Fourier series does not always converge and therefore does not equal the value of the function that we are trying to express. Fortunately, Lipót Fejér corrected this little problem by considering Cesàro's summability method. This method makes the Fourier series of any continuous and periodic function uniformly convergent to the initial data. This last result is a famous example of how summability theory can be used to correct divergent series of functions and to approximate functions in a given space.

In this talk, we will present other types of function spaces where summability theory plays an important role for the approximation of the elements of the space by polynomials. In the first part of the talk, we will present some key notions of summability theory and some summability methods such as the Cesàro, Abel methods and the logarithmic method. The second part of the talk is reserved for summability results for other types of function spaces. In particular, we will present a result similar to that of Fejér for the weighted Dirichlet spaces. We will also present a striking result for the de Branges-Rovnyak spaces of the unit disk.