Olympiade mathématique junior du Canada 2021

Solutions officielles

Vous trouverez la liste complète de nos commanditaires et partenaires du concours en ligne, à l'adresse suivante : https://smc.math.ca/concours/commanditaires-et-partenaires/

Note : Chaque question commence sur une autre page.

Question 1.

Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles concentriques, $\mathcal{C}_1$ étant à l'intérieur de $\mathcal{C}_2$. Soient P_1 et P_2 deux points sur $\mathcal{C}_1$ qui ne sont pas opposés diamétralement l'un à l'autre. Étendons le segment P_1P_2 au-delà de P_2 jusqu'à ce qu'il rencontre le cercle $\mathcal{C}_2$ en un point Q_2. La tangente à $\mathcal{C}_2$ au point Q_2 et la tangente à $\mathcal{C}_1$ au point P_1 se rencontrent au point X. Tracez la seconde tangente à $\mathcal{C}_2$ issue du point X ; elle rencontre $\mathcal{C}_2$ au point Q_1. Démontrez que P_1X est la bissectrice de l'angle $Q_1P_1Q_2$.

Solution. On va montrer que les angles $\angle Q_2P_1X$ et $\angle Q_1P_1X$ sont égaux. Notons, que si O est le centre des deux cercles, les points P_1, X, Q_2 et Q_1 se trouvent sur le cercle de diamètre XO puisque XP_1 est tangent au cercle donc $\angle OP_1X = \pi/2$, et similairement pour les autres tangentes XP_2, XQ_1, XQ_2. Par contre, la mesure $m(\angle Q_2P_1X)$ est la moitié de la mesure de l'arc XQ_2 et la mesure $m(\angle Q_1P_1X)$ est la moitié de la mesure de l'arc XQ_1, et ces deux arcs sont égaux car $|XQ_2| = |XQ_1|$. $\square$

Un concours de la Société mathématique du Canada et appuyé par la profession actuarielle.

Olympiade mathématique junior du Canada 2021

Question 2.

Combien y a-t-il de façons de permuter les nombres entiers positifs de 1 à n de manière à obtenir une permutation dans laquelle, pour toute valeur $k \leq n$, les k premiers éléments ont des restes distincts mod k ?

Solution. On montre par récurrence que les premiers éléments k de la permutation doivent être k entiers consécutifs de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$. Il est évident que pour $k = n$ tous les restes $\mod n$ sont distincts et nous induisons vers le bas pour montrer que, avec la condition ci-dessus, il est vrai pour tous les $k < n$ que les premiers éléments k ont des restes distincts $\mod k$. Notez que dans tout entier k consécutif, les deux seuls avec le même reste $\mod (k-1)$ sont les plus petits et les plus grands entiers, donc l'un de ces deux doit être le k-ème entier de la permutation. Ceci complète la récurrence, et donc à chaque étape supprimante la k-ème entrée de la permutation, il y a 2 choix pour éliminer un entier (le plus grand ou le plus petit) pour obtenir une nouvelle permutation où les premières $k - 1$ entrées ont des restes distincts $\mod (k-1)$, donc la réponse est 2^{n-1}.

$\square$

Olympiade mathématique junior du Canada 2021

Question 3.

Soit $ABCD$ un trapèze où AB et CD sont parallèles, avec $|AB| > |CD|$, et les côtés $|AD| = |BC|$ sont de longueur égale. Soit I le centre du cercle tangent aux droites AB, AC et BD, où A et I sont sur les côtés opposés de BD. Soit J le centre du cercle tangent aux droites CD, AC et BD, où D et J sont sur les côtés opposés de AC. Démontrer que $|IC| = |JB|$.

Solution. Soit $\{P\} = AC \cap BD$ et soit $\angle APB = 180 - 2a$. Comme $ABCD$ et un trapèze isocèle, on a que le triangle APB est isocèle aussi. Alors $\angle PBA = a$, et donc $\angle PBI = 90^\circ - a/2$ parce que le point I est situé sur la bissectrice de l'angle supplémentaire au $\angle PBA$. Comme I est aussi sur la bissectrice d'angle CPB, on obtient $\angle BPI = a$ et, donc, le triangle IPB est isocèle avec $|IP| = |PB|$. De la même façon on montre que le triangle JPC est isocèle avec les côtés égaux $|JP| = |PC|$. On considère les triangles CPI and BPJ où $PI \equiv PB$ et $PJ \equiv CP$. Comme I et J appartiennent tous les deux à la bissectrice d'angle BPC, on conclut la congruence des triangles CPI et BPJ, en impliquant $|IC| = |JB|$.

$\square$

Question 4.

Soit $n \geq 2$ un entier fixe et supposons que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des nombres réels strictement positifs satisfaisant $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2^n - 1$.

Trouver la valeur la plus petite possible de l'expression

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1+a_1} + \frac{a_3}{1+a_1+a_2} + \cdots + \frac{a_n}{1+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}.$$

Solution. On va montrer que le minimum est égal à n en utilisant le théorème des moyennes arithmétique et géométrique comme suit :

$$\begin{aligned}
&\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1+a_1} + \cdots + \frac{a_n}{1+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}} \\
&\qquad = \frac{1+a_1}{1} + \frac{1+a_1+a_2}{1+a_1} + \cdots + \frac{1+a_1+a_2+\cdots+a_n}{1+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}} - n \\
&\qquad \geq n \cdot \sqrt[n]{\frac{1+a_1}{1} \cdot \frac{1+a_1+a_2}{1+a_1} \cdots \frac{1+a_1+a_2+\cdots+a_n}{1+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}} - n \\
&\qquad = n \cdot \sqrt[n]{1+a_1+a_2+\cdots+a_n} - n \\
&\qquad = 2n - n = n.
\end{aligned}$$

De plus, l'égalité (et donc la valuer minimale) est atteinte quand $a_k = 2^{k-1}$ pour tout k, $1 \leq k \leq n$. $\square$

Question 5.

Une fonction f des entiers strictement positifs dans les entiers strictement positifs est appelée *canadienne* si elle vérifie

$$\text{pgcd}\Big(f(f(x)), f(x+y)\Big) = \text{pgcd}(x, y)$$

pour toute paire d'entiers strictement positifs x et y.

Trouver tous les entiers strictement positifs m tels que $f(m) = m$ pour toute fonction canadienne f.

Solution. On définit un nombre entier strictement positif m comme étant *bon* si $f(m) = m$ pour toute fonction canadienne f. On va montrer que m est bon si et seulement si m a au moins deux diviseurs premiers distincts. Soit $P(x, y)$ l'énoncé

$$\text{pgcd}(f(f(x)), f(x+y)) = \text{pgcd}(x, y)$$

pour toute paire $x, y \in \mathbb{N}$, nombres strictement positifs. Soit x un entier strictement positif avec au moins deux diviseurs premiers distincts et soit p^k la plus grande puissance de l'un de ces diviseurs premiers tels que $p^k \mid x$. Si $x = p^k \cdot q$, alors p^k et q sont relativement premiers et $x > p^k, q > 1$. Par $P(q, x-q)$,

$$\text{pgcd}(f(f(q)), f(x-q+q)) = \text{pgcd}(f(f(q)), f(x)) = \text{pgcd}(q, x-q) = q$$

ce que implique $q \mid f(x)$. Par $P(p^k, x-p^k)$,

$$\text{pgcd}(f(f(p^k)), f(x-p^k+p^k)) = \text{pgcd}(f(f(p^k)), f(x)) = \text{pgcd}(p^k, x-p^k) = p^k$$

ce que implique $p^k \mid f(x)$. Puisque p^k et q sont relativement premiers, $x = p^k \cdot q$ divise $f(x)$, ce qui implique que $f(x) \geq x$. Supposons maintenant pour contradiction que $f(x) > x$. Soit $y = f(x) - x > 0$ et notons que, par $P(x, y)$, il s'ensuit que

$$f(f(x)) = \text{pgcd}(f(f(x)), f(x + f(x) - x)) = \text{pgcd}(x, f(x) - x) = \text{pgcd}(x, f(x)).$$

Donc $f(f(x)) \mid x$ et $f(f(x)) \mid f(x)$. Par $P(x, x)$, il s'ensuit que

$$\text{pgcd}(f(f(x)), f(2x)) = \text{pgcd}(x, x) = x.$$

Cela implique que $x \mid f(f(x))$, qui, lorsqu'il est combiné avec le résultat ci-dessus, donne que $f(f(x)) = x$. Depuis $x \mid f(x)$ et x est divisible par au moins deux nombres premiers distincts, $f(x)$ est également divisible par au moins deux nombres premiers distincts. Comme indiqué précédemment, cela implique que $f(x) \mid f(f(x)) = x$, ce qui est une contradiction puisque $f(x) > x$. Par conséquence, $f(x) = x$ pour tous les entiers strictement positifs x avec au moins deux diviseurs premiers distincts.

Maintenant, on montrera que tout $m \in \mathbb{N}$ tel que soit m a un diviseur premier, soit $m = 1$, soit m n'est pas bon. Dans les deux cas, soit $m = p^k$ où $k \geq 0$ et p est un nombre premier et considérons la fonction satisfaisant que $f(p^k) = p^{k+1}$, $f(p^{k+1}) = p^k$ et $f(x) = x$ pour tout $x \neq p^k, p^{k+1}$. Notez que cette fonction vérifie également que $f(f(x)) = x$ pour tous les entiers positifs x. Si $x + y \neq p^k, p^{k+1}$, alors $P(x, y)$ est maintenu par l'algorithme d'Euclide puisque $f(f((x)) = x$ et $f(x + y) = x + y$. Si $x + y = p^{k+1}$, alors $P(x, y)$ équivaut à $\text{pgcd}(x, p^k) = \text{pgcd}(x, p^{k+1} - x) = \text{pgcd}(x, p^{k+1})$ pour tout $x < p^{k+1}$ qui tient puisque la plus grande puissance de p qui peut diviser x est p^k. Si $x + y = p^k$, alors $P(x, y)$ équivaut à $\text{pgcd}(x, p^{k+1}) = \text{pgcd}(x, p^k - x) = \text{pgcd}(x, p^k)$ pour tout $x < p^k$ qui tient comme indiqué ci-dessus. Notez que si $m = 1$ alors ce cas ne peut pas se produire. Puisque cette fonction satisfait $P(x, y)$, m est bon si et seulement si m a deux diviseurs premiers distincts ou plus. $\square$