Olympiade mathématique du Canada 2021

Solutions officielles

Vous trouverez la liste complète de nos commanditaires et partenaires du concours en ligne, à l'adresse suivante : https://smc.math.ca/concours/commanditaires-et-partenaires/

Note : Chaque question commence sur une autre page.

Question 1.

Soit $ABCD$ un trapèze où AB et CD sont parallèles, avec $|AB| > |CD|$, et les côtés $|AD| = |BC|$ sont de longueur égale. Soit I le centre du cercle tangent aux droites AB, AC et BD, où A et I sont sur les côtés opposés de BD. Soit J le centre du cercle tangent aux droites CD, AC et BD, où D et J sont sur les côtés opposés de AC. Démontrer que $|IC| = |JB|$.

Solution. Soit $\{P\} = AC \cap BD$ et soit $\angle APB = 180 - 2a$. Comme $ABCD$ est un trapèze isocèle, on a que le triangle APB est isocèle aussi. Alors $\angle PBA = a$, et donc $\angle PBI = 90° - a/2$ parce que le point I est situé sur la bissectrice de l'angle supplémentaire au $\angle PBA$. Comme I est aussi sur la bissectrice d'angle CPB, on obtient $\angle BPI = a$ et, donc, le triangle IPB est isocèle avec $|IP| = |PB|$. De la même façon on montre que le triangle JPC est isocèle avec les côtés égaux $|JP| = |PC|$. On considère les triangles CPI and BPJ où $PI \equiv PB$ et $PJ \equiv CP$. Comme I et J appartiennent tous les deux à la bissectrice d'angle BPC, on conclut la congruence des triangles CPI et BPJ, en impliquant $|IC| = |JB|$.

$\square$

Un concours de la Société mathématique du Canada et appuyé par la profession actuarielle.

Olympiade mathématique du Canada 2021

Question 2.

Soit $n \geq 2$ un entier fixe et supposons que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des nombres réels strictement positifs satisfaisant $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2^n - 1$.

Trouver la valeur la plus petite possible de l'expression

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1+a_1} + \frac{a_3}{1+a_1+a_2} + \cdots + \frac{a_n}{1+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}.$$

Solution. On va montrer que le minimum est égal à n en utilisant le théorème des moyennes arithmétique et géométrique comme suit :

$$\begin{aligned}
&\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1+a_1} + \cdots + \frac{a_n}{1+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}} \\
&\quad = \frac{1+a_1}{1} + \frac{1+a_1+a_2}{1+a_1} + \cdots + \frac{1+a_1+a_2+\cdots+a_n}{1+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}} - n \\
&\quad \geq n \cdot \sqrt[n]{\frac{1+a_1}{1} \cdot \frac{1+a_1+a_2}{1+a_1} \cdots \frac{1+a_1+a_2+\cdots+a_n}{1+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}} - n \\
&\quad = n \cdot \sqrt[n]{1+a_1+a_2+\cdots+a_n} - n \\
&\quad = 2n - n = n.
\end{aligned}$$

De plus, l'égalité (et donc la valuer minimale) est atteinte quand $a_k = 2^{k-1}$ pour tout k, $1 \leq k \leq n$. $\square$

Olympiade mathématique du Canada 2021

Question 3.

À un souper il y a N hôtes et N invités, tous assis autour d'une table ronde, où $N \geq 4$. Deux invités se parleront soit s'il y a au plus une personne entre eux, soit s'il y a exactement deux personnes entre eux dont au moins une est un hôte. Démontrer que peu importe comment les $2N$ personnes sont placées autour de la table, il y a au moins N paires d'invités qui vont se parler.

Solution. Supposons qu'une *séquence* se réfère à un groupe maximal de participants consécutifs tous du même type (hôte ou invité). Supposons qu'il y ait exactement k séquences d'hôtes et k séquences d'invités. Soit G_i et H_i le nombre de séquences d'invités et d'hôtes, respectivement, de longueur égale à i. De plus, notons par X le nombre d'hôtes entourés de deux séquences d'invités, toutes deux d'une longueur égale à 1. On va montrer d'abord que le nombre de paires d'invités qui parlent entre eux est au moins

$$2N - 3k + G_1 + 2H_1 + H_2 - X.$$

Le nombre de paires d'invités qui s'en parlent sans hôte entre eux est au moins la somme de $\max\{2\ell - 3, 0\}$ pour toutes les longueurs ℓ de séquences des invités. Cette somme est au moins $2N - 3k + G_1$. Maintenant, le nombre de paires d'invités qui s'en parlent avec exactement deux hôtes entre eux est égal à H_2. De plus, le nombre de paires d'invités qui se parlent avec exactement un hôte entre eux est d'au moins $2H_1 - X$. En effet, tout hôte entouré de deux séquences d'invités amène au moins deux paires d'invités à discuter, à moins que ces séquences ne soient toutes deux d'une longueur égale à 1. Cela démontre l'inégalité. Pour finir la preuve, notons que

$$2H_1 + H_2 + N \geq 3k$$

parce que chaque séquence d'hôtes en contribue au moins trois sur le côté gauche.

De plus, l'appariement de chaque séquence comptée en X avec la séquence invitée de longueur 1 qui la suit immédiatement dans le sens trigonométrique montre que $G_1 \geq X$. Ces inégalités nous donne que $2N - 3k + G_1 + 2H_1 + H_2 - X \geq N$, en complétant ainsi la preuve du résultat.

$\square$

Olympiade mathématique du Canada 2021

Question 4.

Une fonction f des entiers strictement positifs dans les entiers strictement positifs est appelée *canadienne* si elle vérifie

$$\operatorname{pgcd}\Big(f(f(x)), f(x+y)\Big) = \operatorname{pgcd}(x, y)$$

pour toute paire d'entiers strictement positifs x et y.

Trouver tous les entiers strictement positifs m tels que $f(m) = m$ pour toute fonction canadienne f.

Solution. On définit un nombre entier strictement positif m comme étant *bon* si $f(m) = m$ pour toute fonction canadienne f. On va montrer que m est bon si et seulement si m a au moins deux diviseurs premiers distincts. Soit $P(x, y)$ l'énoncé

$$\operatorname{pgcd}(f(f(x)), f(x+y)) = \operatorname{pgcd}(x, y)$$

pour toute paire $x, y \in \mathbb{N}$, nombres strictement positifs. Soit x un entier strictement positif avec au moins deux diviseurs premiers distincts et soit p^k la plus grande puissance de l'un de ces diviseurs premiers tels que $p^k \mid x$. Si $x = p^k \cdot q$, alors p^k et q sont relativement premiers et $x > p^k, q > 1$. Par $P(q, x-q)$,

$$\operatorname{pgcd}(f(f(q)), f(x-q+q)) = \operatorname{pgcd}(f(f(q)), f(x)) = \operatorname{pgcd}(q, x-q) = q$$

ce que implique $q \mid f(x)$. Par $P(p^k, x-p^k)$,

$$\operatorname{pgcd}(f(f(p^k)), f(x-p^k+p^k)) = \operatorname{pgcd}(f(f(p^k)), f(x)) = \operatorname{pgcd}(p^k, x-p^k) = p^k$$

ce que implique $p^k \mid f(x)$. Puisque p^k et q sont relativement premiers, $x = p^k \cdot q$ divise $f(x)$, ce qui implique que $f(x) \geq x$. Supposons maintenant pour contradiction que $f(x) > x$. Soit $y = f(x) - x > 0$ et notons que, par $P(x, y)$, il s'ensuit que

$$f(f(x)) = \operatorname{pgcd}(f(f(x)), f(x + f(x) - x)) = \operatorname{pgcd}(x, f(x) - x) = \operatorname{pgcd}(x, f(x)).$$

Donc $f(f(x)) \mid x$ et $f(f(x)) \mid f(x)$. Par $P(x, x)$, il s'ensuit que

$$\operatorname{pgcd}(f(f(x)), f(2x)) = \operatorname{pgcd}(x, x) = x.$$

Cela implique que $x \mid f(f(x))$, qui, lorsqu'il est combiné avec le résultat ci-dessus, donne que $f(f(x)) = x$. Depuis $x \mid f(x)$ et x est divisible par au moins deux nombres premiers distincts, $f(x)$ est également divisible par au moins deux nombres premiers distincts. Comme indiqué précédemment, cela implique que $f(x) \mid f(f(x)) = x$, ce qui est une contradiction puisque $f(x) > x$. Par conséquence, $f(x) = x$ pour tous les entiers strictement positifs x avec au moins deux diviseurs premiers distincts.

Maintenant, on montrera que tout $m \in \mathbb{N}$ tel que soit m a un diviseur premier, soit $m = 1$, soit m n'est pas bon. Dans les deux cas, soit $m = p^k$ où $k \geq 0$ et p est un nombre premier et considérons la fonction satisfaisant que $f(p^k) = p^{k+1}$, $f(p^{k+1}) = p^k$ et $f(x) = x$ pour tout $x \neq p^k, p^{k+1}$. Notez que cette fonction vérifie également que $f(f(x)) = x$ pour tous les entiers positifs x. Si $x + y \neq p^k, p^{k+1}$, alors $P(x, y)$ est maintenu par l'algorithme d'Euclide puisque $f(f((x)) = x$ et $f(x + y) = x + y$. Si $x + y = p^{k+1}$, alors $P(x, y)$ équivaut à $\text{pgcd}(x, p^k) = \text{pgcd}(x, p^{k+1} - x) = \text{pgcd}(x, p^{k+1})$ pour tout $x < p^{k+1}$ qui tient puisque la plus grande puissance de p qui peut diviser x est p^k. Si $x + y = p^k$, alors $P(x, y)$ équivaut à $\text{pgcd}(x, p^{k+1}) = \text{pgcd}(x, p^k - x) = \text{pgcd}(x, p^k)$ pour tout $x < p^k$ qui tient comme indiqué ci-dessus. Notez que si $m = 1$ alors ce cas ne peut pas se produire. Puisque cette fonction satisfait $P(x, y)$, m est bon si et seulement si m a deux diviseurs premiers distincts ou plus. $\square$

Olympiade mathématique du Canada 2021

Question 5.

Nina et Tadashi jouent au jeu suivant. Au début, un triplet (a, b, c) de nombres entiers non négatifs satisfaisant $a + b + c = 2021$ est écrit au tableau. Nina et Tadashi jouent à tour de rôle, avec Nina commençant. Pour jouer, un joueur choisit un entier strictement positif k et un des trois nombres sur le tableau ; ensuite, le joueur augmente le nombre choisi de k et réduit de k chacun des deux autres nombres. Un joueur perd si, durant son tour, un des nombres au tableau devient négatif.

Trouver le nombre de triplets initiaux (a, b, c) pour lesquels Tadashi a une stratégie gagnante.

Solution. La réponse est $3^{\text{nombre de 1s dans la représentation binaire de 2021}} = 3^8 = 6561$.

Nous définissons deux entiers strictement positifs *coïncidants dans la position* 2^ℓ si leurs représentations binaires ont toutes les deux un 1 dans cette position. On dit que deux entiers strictement positifs sont *coïncidants* s'ils coïncident dans une certaine position. Notre affirmation principale est la suivante.

Énoncé 1. *Un triple (x, y, z) est perdant si et seulement si aucune paire de x, y, z est une paire d'entiers coïncidants.*

Soit $d_\ell(a)$ le chiffre à la position 2^ℓ de la représentation binaire de a. Soit & l'opération *et* au niveau de la représentation binaire : c'est-à-dire $x\&y$ est le nombre satisfaisant $d_\ell(x\&y) = d_\ell(x)d_\ell(y)$ pour tout ℓ.

Lemme 1. *Soient x, y, z des entiers strictement positifs dont au moins une paire est une paire d'entiers coïncidants. Définissez cycliquement $x' = (x + y)\&(x + z)$ et y', z'. Au moins une des inégalités $x < x'$, $y < y'$, $z < z'$ est vérifiée.*

Démonstration. Soit ℓ maximal tel que deux des x, y, z conïncident dans la position 2^ℓ. Nous calculons le nombre des sommes $x + y$, $x + z$, $y + z$ impliquant une retenue de la position 2^ℓ ajoutée à la position $2^{\ell+1}$, donc sur les valeurs de $d_{\ell+1}(x), d_{\ell+1}(y), d_{\ell+1}(z)$. Parce qu'au moins deux des $d_\ell(x), d_\ell(y), d_\ell(z)$ sont égaux à 1, au moins une des sommes $x + y$, $x + z$, $y + z$ implique une retenue de la position 2^ℓ ajoutée au rang supérieur.

Cas 1. *Une retenue.*

SPDG soit $x + y$ l'addition avec la retenue. Alors, $d_\ell(x) = d_\ell(y) = 1$ et $d_\ell(z) = 0$. Puisque x, y, z ne coïncident dans aucune position à gauche de la position 2^ℓ, les représentations binaires de z, z' sont les mêmes à gauche de la position 2^ℓ. Comme les sommes $x + z$ et $y + z$ n'impliquent pas une retenue de la position 2^ℓ, on a $d_\ell(x + z) = d_\ell(y + z) = 1$, et donc $d_\ell(z') = 1$. Ainsi $z' > z$, comme souhaité.

Cas 2. *Au moins deux retenues : $x+y$ et $x+z$ ont une retenue et $d_{\ell+1}(y) = d_{\ell+1}(z) = 0$, ou un équivalent cyclique. (Ici, $y + z$ peuvent porter une retenue ou non.)*

Soit i maximal tel que $d_{\ell+1}(x) = \cdots = d_{\ell+i}(x) = 1$ (éventuellement $i = 0$). Par la maximalité de ℓ, $d_{\ell+1}(y) = \cdots = d_{\ell+i}(y) = d_{\ell+1}(z) = \cdots = d_{\ell+i}(z) = 0$. Par la maximalité de i, $d_{\ell+i+1}(x) = 0$.

Si $d_{\ell+i+1}(y) = d_{\ell+i+1}(z) = 0$, alors $d_{\ell+i+1}(x+y) = d_{\ell+i+1}(x+z) = 1$, donc $d_{\ell+i+1}(x') = 1$. Les représentations binaires de x et x' sont identiques à gauche de la position $2^{\ell+i+1}$, donc $x' > x$.

Sinon, SPDG $d_{\ell+i+1}(y) = 1$ et $d_{\ell+i+1}(z) = 0$. (Notez que, ici, nous avons en fait $i \geq 1$.) Alors $d_{\ell+i+1}(y+z) = d_{\ell+i+1}(x+z) = 1$, donc $d_{\ell+i+1}(z') = 1$. Les représentations binaires de z et z' concordent à gauche de la position $2^{\ell+i+1}$, donc $z' > z$.

Cas 3. *Au moins deux retenues, et la condition du cas 2 ne se produit pas.*

SPDG soient $x+y, x+z$ les deux sommes avec retenues. Étant donné que la condition du cas 2 ne se produit pas, $d_{\ell+1}(y) = 1$ ou $d_{\ell+1}(z) = 1$. Dans les deux cas, $d_{\ell+1}(x) = 0$. SPDG $d_{\ell+1}(y) = 1$ et $d_{\ell+1}(z) = 0$.

Étant donné que la condition du cas 2 ne se produit pas, $y+z$ n'implique pas de retenue à partir de la position 2^{ℓ}. (Sinon, $x+y$ et $y+z$ portent et $d_{\ell+1}(x) = d_{\ell+1}(z) = 0$.) Alors $d_{\ell+1}(x+z) = d_{\ell+1}(y+z) = 1$, donc $d_{\ell+1}(z') = 1$. Les représentations binaires de z et z' concordent à gauche de la position $2^{\ell+1}$, donc $z' > z$. □

Démonstration de l'Énoncé 1. Procéder par induction sur $x+y+z$. Il n'y a pas de cas de base.

Supposons par récurrence que l'énoncé soit valable pour tout (x, y, z) dont la somme est inférieure à N. Considérons un triple (x, y, z) avec $x+y+z = N$.

Supposons qu'il n'y ait pas deux *coïncidences* parmi x, y, z. Si tous les mouvements de cette position conduisent à des positions avec une coordonnée négative, (x, y, z) est une position perdante, comme affirmé. Sinon, le joueur augmente ou diminue toutes les coordonnées par k. Considérons le plus petit m tel que $d_m(k) = 1$. Le mouvement du joueur basculera chacun de $d_m(x), d_m(y), d_m(z)$. Puisque au plus l'un des $d_m(x), d_m(y)$, $d_m(z)$ initials est 1, au moins deux des nouveaux $d_m(x), d_m(y)$, $d_m(z)$ seront 1. Ainsi, deux des nouveaux x, y, z coïncident. Par récurrence, le nouveau (x, y, z) est gagnant. Ainsi, le triplet initial (x, y, z) perd, comme indiqué.

Dans l'autre direction, supposons qu'au moins une paire de x, y, z coïncident. Par le Lemme 1, au moins un des $x < x', y < y', z < z'$ est satisfait. SPDG, considérer $x < x'$. Laissez le joueur choisir $k = x' - x$, diminuer y, z de k et augmenter x de k. Les nouvelles coordonnées ne sont pas négatives, parce que

$$y - k = x + y - x' \geq 0$$

car $x' \leq x + y$, et de même pour la coordonnée z. De plus, la représentation binaire du nouveau x se compose des 1 dans le représentations binaires de $x+y$ et $x+z$; la représentation binaire du nouveau y se compose des 1 dans celui de $x+y$ mais pas de $x+z$; et la représentation binaire du nouveau z se compose des 1 dans celui de $x+z$ mais pas de $x+y$. Ainsi, deux des nouveaux x, y, z ne coïncident pas. Par récurrence, le nouveau (x, y, z) perd. Ainsi, le triplet (x, y, z) initial est gagnant, comme annoncé.

□

Nous utilisons l'Énoncé 1 pour compter les positions perdantes (x, y, z) avec

$$x + y + z = 2021 = 11111100101_2.$$

Dans chaque position où $d_\ell(2021) = 0$, les positions perdantes doivent avoir $d_\ell(x) = d_\ell(y) = d_\ell(z) = 0$. Dans chaque position où $d_\ell(2021) = 1$, le triplet de chiffres $(d_i(x), d_i(y), d_i(z))$ est l'un des $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$. Cela donne un nombre de $3^8 = 6561$.

$\square$