Olympiade mathématique du Canada 2022

Solutions officielles – 2022 OMC

P1. Supposons que des nombres réels a et b satisfont

$$ab + \sqrt{ab+1} + \sqrt{a^2+b} \cdot \sqrt{b^2+a} = 0.$$

Trouvez, preuve à l'appui, la valeur de

$$a\sqrt{b^2+a} + b\sqrt{a^2+b}.$$

Solution. Commençons par reformuler l'équation comme suit :

$$ab + \sqrt{a^2+b}\sqrt{b^2+a} = -\sqrt{ab+1}.$$

En élevant au carré, on obtient

$$\begin{aligned} a^2b^2 + 2ab\sqrt{a^2+b}\sqrt{b^2+a} + (a^2+b)(b^2+a) &= ab+1 \\ (a^2b^2+a^3) + 2ab\sqrt{a^2+b}\sqrt{b^2+a} + (a^2b^2+b^3) &= 1 \\ \left(a\sqrt{b^2+a} + b\sqrt{a^2+b}\right)^2 &= 1 \\ a\sqrt{b^2+a} + b\sqrt{a^2+b} &= \pm 1. \end{aligned}$$

On montre ensuite que $a\sqrt{b^2+a} + b\sqrt{a^2+b} > 0$. Notons que

$$ab = -\sqrt{ab+1} - \sqrt{a^2+b} \cdot \sqrt{b^2+a} < 0,$$

ainsi a et b sont de signes opposés. Sans perte de généralité, on peut supposer que $a > 0 > b$. On peut donc reformuler ainsi

$$a\sqrt{b^2+a} + b\sqrt{a^2+b} = a(\sqrt{b^2+a} + b) - b(a - \sqrt{a^2+b})$$

et, comme $\sqrt{b^2+a}+b$ et $a-\sqrt{a^2+b}$ sont tous deux positifs, l'expression suivante est positive. Par conséquent,

$$a\sqrt{b^2+a} + b\sqrt{a^2+b} = 1,$$

ce qui conclut la démonstration. □

P2. Désignons par $d(k)$ le nombre d'entiers positifs qui sont des diviseurs de k. Par exemple, $d(6) = 4$ puisque 6 admet 4 diviseurs positifs, à savoir 1, 2, 3, et 6. Montrez que pour tout entier positif n,

$$d(1) + d(3) + d(5) + \cdots + d(2n-1) \leq d(2) + d(4) + d(6) + \cdots + d(2n).$$

Solution. Pour tout entier k et tout ensemble d'entiers S, soit $f_S(k)$ le nombre de multiples de k appartenant à S. On peut dénombrer les paires (k, s) avec $k \in \mathbb{N}$ divisant $s \in S$ de deux façons différentes, à savoir :

— Pour chaque $s \in S$, il y a $d(s)$ paires comportant s, soit une pour chaque diviseur de s.

— Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, il y a $f_k(S)$ paires comportant k, soit une pour chaque multiple de k.

Ainsi,

$$\sum_{s \in S} d(s) = \sum_{k \in \mathbb{N}} f_S(k).$$

Désignons respectivement par

$$I = \{1, 3, 5, \ldots, 2n-1\} \qquad \text{et} \qquad P = \{2, 4, 6, \ldots, 2n\}$$

l'ensemble des entiers impairs entre 1 et $2n$ et l'ensemble des entiers pairs entre 1 et $2n$. Il suffit de montrer que

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} f_I(k) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} f_P(k).$$

Puisque les éléments de I n'ont que des diviseurs impairs,

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} f_I(k) = \sum_{k \text{ impair}} f_I(k).$$

Pour tout k impair, considérons les multiples de k entre 1 et $2n$. Ceux-ci forment une suite

$$k, 2k, 3k, \ldots, \left\lfloor \frac{2n}{k} \right\rfloor k$$

qui alterne entre des termes pairs et impairs. Ou bien il y a un nombre égal de termes pairs et de termes impairs, ou il y a un terme impair de plus qu'il n'y a de termes pairs. Par conséquent, on a l'inégalité suivante

$$f_I(k) \leq f_P(k) + 1$$

pour chaque k impair. En combinant cela avec les deux observations préalables, on obtient l'inégalité souhaitée :

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in \mathbb{N}} f_I(k) &= \sum_{k \text{ impair}} f_I(k) \\
&\leq \sum_{k \text{ impair}} (f_P(k) + 1) \\
&= \sum_{k \text{ impair}} f_P(k) + n \\
&= \sum_{k \text{ impair}} f_P(k) + f_P(2) \\
&\leq \sum_{k \in \mathbb{N}} f_P(k).
\end{aligned}$$

□

P3 : Soit $n \geq 2$ un entier. Initialement, le nombre 1 se trouve écrit n fois sur un tableau. Chaque minute, Vishal choisit deux nombres inscrits sur le tableau, disons a et b, les efface et écrit $a+b$ ou $\min\{a^2, b^2\}$. Après $n-1$ minutes, il n'y a plus qu'un seul nombre sur le tableau. Notons $f(n)$ la plus grande valeur possible pour ce nombre. Montrez que

$$2^{n/3} < f(n) \leq 3^{n/3}.$$

Solution. Il est évident que $f(n)$ est une fonction strictement croissante car on peut former $f(n-1)$ avec $n-1$ nombres 1 auquel on ajoute un dernier 1. On peut toutefois faire mieux. Supposons que Vishal inscrit $f(n)$ sur le tableau. Après $n-2$ minutes, il reste deux nombres ; disons que ceux-ci sont respectivement formés de x et y nombres 1, où $x+y=n$. Ces nombres sont clairement au plus $f(x), f(y)$ (on peut d'ailleurs faire en sorte qu'ils soient exactement $f(x), f(y)$) et on obtient ainsi

$$f(n) = \max_{x+y=n,\, 1\leq x\leq y\leq n-1} \Big(\max\left(f(x)+f(y), f(x)^2\right)\Big) \tag{1}$$

où l'on exploite le fait que la focntion f est croissante afin d'obtenir $\min(f(x)^2, f(y)^2) = f(x)^2$ lorsque $x \leq y$. En particulier, $f(n+1) \geq f(n)+1$ et $f(2n) \geq f(n)^2$ pour tout entier positif n.

<u>Borne supérieure</u> :

Première preuve pour la borne supérieure. On procède par induction. On peut vérifier que $f(n) = n$ pour $n \leq 4$ et cela satisfait la borne $f(n) = n \leq 3^{n/3}$. Supposons que cela est vrai pour tout $m < n$ (pour un certain $n \geq 5$) et pour x, y comme dans **??** on a

$$f(x)^2 \leq f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)^2 \leq \left(3^{n/6}\right)^2 = 3^{n/3},$$

comme voulu. Il nous reste donc à montrer que $f(x)+f(y) \leq 3^{n/3}$. Par induction, il suffit de montrer que

$$3^{x/3} + 3^{y/3} \leq 3^{(x+y)/3},$$

pour $1 \leq x \leq y \leq n-1$ et $x+y=n$. Cela équivaut à

$$1 + 3^{(y-x)/3} \leq 3^{y/3}.$$

Posons $w = 3^{(y-x)/3}$ et on exige que $3^{x/3}w \geq w+1$. Si $x \geq 2$, alors c'est vrai car $w \geq 1$, et si $x = 1$ alors $w = 3^{(n-2)/3} \geq 3$ et le résultat demeure vrai. Ainsi, tous les termes de l'équation **??** sont au plus $3^{n/3}$ et il s'ensuit que $f(n) \leq 3^{n/3}$, ce qui achève la démonstration de la borne supérieure.

Seconde preuve pour la borne supérieure. Considérons un second jeu avec les même règles mais dans lequel Vishal peut remplacer a et b par l'un ou l'autre parmi $a+b$ et ab. Soit $g(n)$ la plus grande valeur possible pour ce nouveau jeu. Alors $f(n) \leq g(n)$ puisque $\min\{a^2, b^2\} \leq ab$.

On peut vérifier que $g(n) = n$ pour $n \leq 4$. Donc $g(n) \leq 3^{n/3}$ pour ces valeurs. Si x et y sont tous deux supérieurs à 1, alors $g(x) + g(y) \leq g(x)g(y)$. Par conséquent, pour $n > 4$, on a

$$g(n) = \max \left\{ g(n-1) + 1, \max_{1 \leq x \leq n-1} g(x)g(n-x) \right\}.$$

Pour la suite, on procède comme dans la première preuve. Supposons que $n > 4$ et $g(m) \leq 3^{m/3}$ pour tout $m < n$. Si $1 \leq x \leq n-1$, alors $g(x)g(n-x) \leq 3^{x/3}3^{(n-x)/3} = 3^{n/3}$ et $g(n-1)+1 \leq 3^{(n-1)/3} + 1$. Or, nous avons vu dans la première preuve que cela est inférieur à $3^{n/3}$. Il s'ensuit que $f(n) \leq g(n) \leq 3^{n/3}$.

Borne inférieure :
Première preuve pour la borne inférieure. Débutons par un lemme

Lemme 1. *Soit m un entier non négatif. Alors*

$$f(2^m) \geq 2^{2^{m-1}} \quad \textit{et} \quad f(3 \cdot 2^m) \geq 3^{2^m}.$$

Démonstration. On procède par induction. On peut vérifier que $f(n) = n$ pour $n \leq 3$, ce qui établit le lemme dans le cas particulier où $m = 0$. Pour un $m > 0$ quelconque, on a

$$f(2^m) \geq f(2^{m-1})^2 \geq \left(2^{2^{m-2}}\right)^2 = 2^{2^{m-1}}$$
$$f(3 \cdot 2^m) \geq f(3 \cdot 2^{m-1})^2 \geq \left(3^{2^{m-1}}\right)^2 = 3^{2^m},$$

par induction, comme voulu. □

(Ce lemme peut aussi être démontré de façon plus constructive. En gros, si $n = 2^m$, alors on peut partitionner les nombres 1 inscrits sur le tableau en 2^{m-1} paires et additionner ensuite les paires afin d'obtenir 2^{m-1} nombres 2 ($2 = 2^{2^0}$) ; on multiplie ensuite les paires de 2 afin d'obtenir 2^{m-2} nombres 4 ($4 = 2^{2^1}$) ; on multiplie ensuite les paires de nombre 4 afin d'obtenir 2^{m-3} nombres 16 ($16 = 2^{2^2}$) ; et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il n'y ait plus que 2 ($= 2^1$) copies de $2^{2^{m-2}}$, qu'on remplace ensuite par un $2^{2^{m-1}}$). Le processus est similaire pour $n = 3 \cdot 2^m$, à ceci près qu'à la première étape on partitionne les nombres 1 en 2^m groupes de 3 ; qu'on utilise l'addition à l'intérieur de chacun de ces groupes afin d'obtenir 2^m nombres 3.)

Supposons maintenant que $2^x \leq n < 3 \cdot 2^{x-1}$ pour un certain entier x. On a alors

$$f(n) \geq f(2^x) \geq 2^{2^{x-1}} > 2^{n/3},$$

comme voulu. S'il n'existe aucun tel entier x, alors il existe un entier x tel que $3 \cdot 2^{x-1} \leq n < 2^{x+1}$ auquel cas on a

$$f(n) \geq f(3 \cdot 2^{x-1}) \geq 3^{2^{x-1}} > 2^{2^{x+1}/3} > 2^{n/3}$$

où la seconde inégalité équivaut à $2^{x-1}\log(3) \geq \frac{2^{x+1}}{3}\log(2)$. En divisant par 2^x et en éliminant les dénominateurs, on montre que cela est équivalent à $3\log(3) \geq 4\log 2$. Or, cela est vrai puisque $3^3 = 27 > 16 = 2^4$.

Seconde preuve pour la borne inférieure. Nous montrerons par induction un résultat encore plus fort, à savoir $f(n) \geq 2^{(n+1)/3}$ pour $n \geq 2$. On peut montrer que $f(n) = n$ pour $n = 2, 3$ et 4, ce qui prouve la validité du résultat pour ces valeurs. Supposons que $n \geq 5$ et que $f(k) \geq 2^{(k+1)/3}$ pour tout $k = 2, 3, \ldots, n-1$, alors

$$\begin{aligned} f(n) &\geq f\left(\lfloor n/2 \rfloor\right)^2 \\ &\geq \left(2^{(\lfloor n/2 \rfloor + 1)/3}\right)^2 \qquad \text{puisque } \left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor \geq 2 \\ &= 2^{(2\lfloor n/2 \rfloor + 2)/3} \\ &\geq 2^{(n+1)/3} \qquad \text{puisque } \left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor \geq \tfrac{n-1}{2}. \end{aligned}$$

Le résultat s'ensuit par induction. □

Remarque 1. *On peut montrer que* f *satisfait la relation de récurrence* $f(n) = n$ *pour* $n = 1, 2$ *;* $f(2n) = f(n)^2$ *pour* $n \geq 2$ *et* $f(2n+1) = f(2n) + 1$ *pour* $n \geq 1$*. La borne supérieure dans le problème est optimale (il y a égalité pour* $n = 3 \cdot 2^x$*) mais la borne inférieure ne l'est pas.*

P4. Soit n un entier positif. Un ensemble de n droites distinctes divise le plan en un certain nombre de régions (possiblement non bornées). Cet ensemble de droites est qualifié de "bon" s'il n'y a aucun triplet de droites qui se croisent en un même point. Une "coloration" est une attribution de deux couleurs à chacune des régions. La première couleur provient de l'ensemble $\{A_1, A_2\}$ et la seconde couleur provient de l'ensemble $\{B_1, B_2, B_3\}$. Un bon ensemble de droites est dit "coloriable" s'il existe une coloration telle que

1. aucune couleur n'est attribuée à deux régions partageant une arête ;
2. pour chaque $i \in \{1, 2\}$ et $j \in \{1, 2, 3\}$, il y a au moins une région qui se voit attribuer les couleurs A_i et B_j.

Déterminez tous les n pour lesquels toute bonne configuration de n droites est coloriable.

Solution. La réponse est $n \geq 5$. Si $n \leq 4$, considérons n droites parallèles. Il y a un total de 6 combinaisons de couleurs requises et seulement $n + 1 \leq 5$ régions au total. Ainsi, la coloration n'est pas possible

Supposons maintenant que $n \geq 5$. Faisons pivoter la configuration de sorte qu'il n'y ait aucune droite horizontale et orientons chaque droite de sorte que la direction "avant" corresponde à une augmentation de la valeur en y. En procédant ainsi, chaque droite divise le plan en deux, avec une partie située à gauche de la direction "avant" et une partie située à droite. Chaque région du plan est située à droite de k droites et à gauche de $n - k$ droites pour un certain $0 \leq k \leq n$. De plus, il y a une région pour chaque k : soit w suffisamment grand pour dépasser la valeur en y de chaque intersection de deux droites. Considérons la droite horizontale $y = w$. Un point très éloigné sur la gauche de cette droite sera situé à gauche de chaque droite et, à mesure que l'on franchit les droites du problème, on parcourt toutes les valeurs de k.

Enfin, prenons la région qui est située à droite de k droites. Attribuons lui la couleur A_1 si k est impair et A_2 si k est pair. De même, attribuons lui la couleur B_i si $k \equiv i \pmod 3$. En vertu de ce qui a été établi au paragraphe précédent, il y a des régions pour chaque $k = 0, 1, \ldots, 5$ et il s'ensuit qu'il y a une région s'étant vu attribuer A_i et B_j pour chaque (i, j). De plus, deux régions partageant une arête seront respectivement situées à droite de k et $k + 1$ droites pour un certain k. Par construction, les A_i et les B_i respectivement attribués à ces régions diffèrent forcément. Nous avons donc montré que l'ensemble de droites est coloriable. $\square$

P5. Soit $ABCDE$ un pentagone convexe pour lequel les cinq sommets se trouvent sur un cercle et les cinq côtés sont tangents à un autre cercle à l'intérieur du pentagone. Il y a $\binom{5}{3} = 10$ triangles pouvant être formés en choisissant 3 des 5 sommets. Pour chacun de ces 10 triangles, on identifie le centre de son cercle inscrit. Montrez que ces 10 centres se trouvent sur deux cercles concentriques.

Solution. Soit I le centre du cercle inscrit au pentagone $ABCDE$. Notons respectivement I_A le centre du cercle inscrit au triangle EAB et I_a le centre du cercle inscrit au triangle DAC. De façon similaire, définissons $I_B, I_b, I_C, I_c, I_D, I_d, I_E$ et I_e.

Nous montrerons dans un premier temps que $I_AI_BI_CI_DI_E$ sont cocycliques. Soit ω_A le cercle dont le centre est le point milieu de l'arc DE et passant par les points D et E. De la même façon, définissons $\omega_B, \omega_C, \omega_D$ et ω_E. Il est bien connu que le centre du cercle inscrit à un triangle est situé sur de tels cercles. En particulier I_A est sur ω_C et ω_D. Alors l'axe radical de ω_C, ω_D est la droite AI_A. Mais il s'agit là de la bissectrice de $\angle EAB$, à savoir une droite sur laquelle I est lui aussi situé. Donc I est en fait le centre radical de $\omega_A, \omega_B, \omega_C, \omega_D, \omega_E$! Le fait de réaliser une symétrie centrale à partir de I interchange I_A et A et, puisque $ABCDE$ sont cocycliques, $I_AI_BI_CI_DI_E$ sont également cocycliques.

Soit O le centre du cercle $I_AI_BI_CI_DI_E$. Nous allons montrer que $OI_a = OI_d$, ce qui achève la résolution du problème car on peut considérer les versions cycliques de cette équation afin d'obtenir $OI_a = OI_d = OI_b = OI_e = OI_c$. Rappelons le résultat bien connu que voici : pour tout quadrilatère cyclique $WXYZ$, les centres des cercles inscrits XYZ, YZW, ZWX, WXY forment un rectangle. En appliquant ce lemme à $ABCD$, on voit que I_B, I_C, I_a, I_d forment un rectangle dans cet ordre. Alors la médiatrice de I_BI_C est exactement la médiatrice de I_aI_d. Ainsi, O est éequidistant à I_a et I_d, ce qui achève la démonstration. $\square$

