Le Concours mathématique du mésangeai du Canada 2022

Solutions Définitives

Un concours de la Société mathématique du Canada.

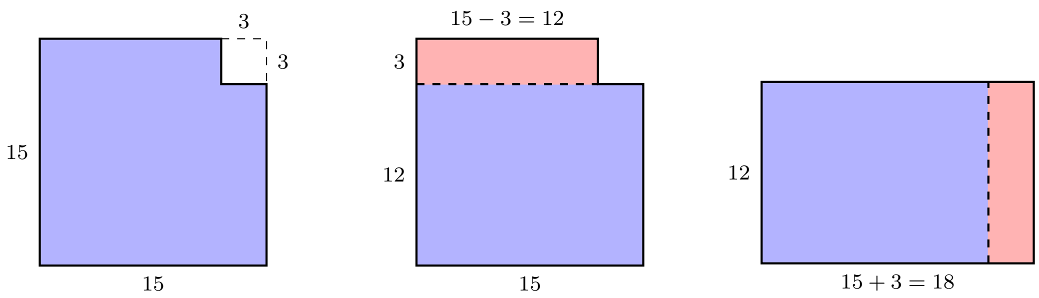
Partie A : 4 points chacune

1. Calculez
$$(1+2+3+4+5)^2 - 3^2.$$
(A) 26 **(B)** 46 **(C)** 144 **(D)** 216 **(E)** 49 284

Solution 1 : En appliquant les règles de priorité des opérations, on obtient

$$\begin{aligned}(1+2+3+4+5)^2 - 3^2 &= 15^2 - 3^2\\ &= 225 - 9\\ &= 216\end{aligned}$$

Solution 2 : On peut considérer le nombre qui nous intéresse graphiquement comme étant l'aire d'un carré 15×15 duquel un carré 3×3 a été extrait (voir figure à gauche). On peut découper une pièce 12×3 (comme dans le figure centrale) et déplacer ensuite cette pièce pour obtenir un rectangle 18×12 de 216 unités carré d'aire (voir la figure de droite).



Réponse : $\boxed{\text{(D)}}$

2. Chacun des symboles qui figurent dans l'équation ci-dessous représente un nombre naturel différent.

$$\maltese + \maltese = \spadesuit$$
$$\maltese \times \clubsuit = \spadesuit$$
$$\clubsuit + \clubsuit + \clubsuit = \spadesuit$$

Quel nombre le symbole $\spadesuit$ représente-t-il?

(A) 6 **(B)** 10 **(C)** 2 **(D)** 20 **(E)** 8

Solution : Il est clair que si $\maltese = \clubsuit = \spadesuit = 0$, alors les trois équations sont satisfaites. Cependant, comme chaque symbole doit représenter un nombre entier <u>différent</u>, cela n'est pas permis. De plus, si $\maltese = 0$ ou $\clubsuit = 0$, alors la deuxième équation donnerait $\spadesuit = 0$, ce qui n'est pas permis. De même, si $\spadesuit = 0$, alors la première équation donne $\maltese = 0$ tandis que la dernière équation fait $\clubsuit = 0$, ce qui n'est pas permis. On peut donc supposer que $\maltese, \clubsuit, \spadesuit > 0$.

Comme $\clubsuit + \clubsuit + \clubsuit = 3 \times \clubsuit$, la troisième équation peut être reformulée comme suit :

$$3 \times \clubsuit = \spadesuit.$$

Cela signifie que, de la deuxième équation, nous pouvons conclure que $\maltese = 3$. Par conséquent, la première équation donne

$$\maltese + \maltese = 3 + 3 = 6 = \spadesuit.$$

La dernière équation implique que $3 \times \clubsuit = 6$, d'où l'on tire que $\clubsuit = 2$. Ainsi, toutes les équations sont satisfaites si $\maltese = 3$, $\clubsuit = 2$ et $\spadesuit = 6$.

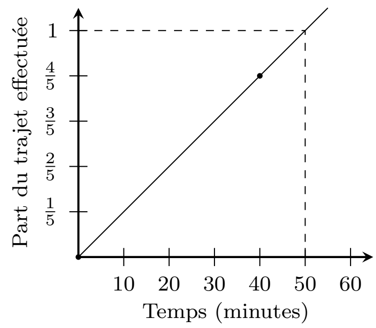
Réponse : $\boxed{\textbf{(A)}}$

3. Elizabeth marche à une vitesse constante. Elle parcourt $\frac{4}{5}$ du chemin vers sa maison en 40 minutes. Combien de temps lui faudra-t-il pour parcourir le reste du chemin?

(A) 6 minutes **(B)** 8 minutes **(C)** 10 minutes
(D) 32 minutes **(E)** 50 minutes

Solution 1 : Comme $1-\frac{4}{5} = \frac{1}{5}$, Elizabeth doit encore parcourir $\frac{1}{5}$ du trajet. Comme elle marche $\frac{4}{5}$ du chemin du retour en 40 minutes, elle marche $\frac{4}{5} \div 4 = \frac{1}{5}$ du chemin du retour en $40 \div 4 = 10$ minutes.

Solution 2 : Traçons le graphe de la distance parcourue par Elizabeth en fonction du temps. Il s'agit d'une droite puisque celle-ci se déplace à une vitesse constante.



En prolongeant le graphe, on voit que son voyage total prendra 50 minutes, ce qui signifie qu'il lui reste 10 minutes à marcher.

Réponse : $\boxed{\textbf{(C)}}$

4. De combien de façons différentes peut-on payer 28 \$ en n'utilisant que des billets de 10 \$, des billets de 5 \$ et des pièces de 1 \$?

(A) 8 **(B)** 9 **(C)** 10 **(D)** 12 **(E)** 14

Solution : Si l'on divise les cas en fonction du nombre de billets de 10 \$ utilisés, on obtient :

Cas 1 : deux billets de 10 \$
Il reste $28\$ - 2 \times 10\$ = 8\$$ à payer. Cette somme peut être payée en utilisant zéro ou un billet de 5 \$ et en complétant le reste avec des pièces de 1 \$. Il y a donc deux possibilités. (huit pièces de 1\$; ou un billet de 5 \$ et trois pièces de 1\$)

Cas 2 : un billet de 10 \$
Il reste $28\$ - 10\$ = 18\$$ à payer. Cette somme peut être payée en utilisant zéro, un, deux ou trois billets de 5 \$ et en complétant le reste avec des pièces de 1 \$. Il y a donc quatre possibilités. (dix-huit pièces de 1\$; un billet de 5 \$ et treize pièces de 1\$; deux billets de 5\$ et huit pièces de 1\$; ou trois billets de 5\$ et trois pièces de 1\$)

Cas 3 : aucun billet de 10 \$
Il reste la totalité des 28 \$ à payer. Cette somme peut être payée en utilisant zéro, un, deux, trois, quatre ou cinq billets de 5 \$ et en complétant le reste avec des pièces de 1 \$. Il y a donc six possibilités. (vingt-huit pièces de 1\$; un billet de 5 \$ et vingt-trois pièces de 1\$; deux billets de 5\$ et dix-huit pièces de 1\$; trois billets de 5\$ et treize pièces de 1\$; quatre billets de 5\$ et huit pièces de 1\$; ou cinq billets de 5\$ et trois pièces de 1\$)

$\therefore$ Il y a $2 + 4 + 6 = 12$ façons de payer 28 \$ en n'utilisant que des billets de 10 \$, des billets de 5 \$ et des pièces de 1 \$

Réponse : $\boxed{\textbf{(D)}}$

5. Jordana trouve un texte étrange où les lettres ont été remplacées par des chiffres. Elle remplace chaque nombre par la lettre qui lui correspond (par exemple $1 = A$, $2 = B$ et ainsi de suite) mais le message demeure confus. Jordana soupçonne que les nombres ont été augmentés d'un certain nombre n (le même pour chaque lettre). Le message d'origine est :

   16 9 17 9 23 5 18 11 9 5 13 8 25 7 5 18 5 8 5 9 23 24
   25 18 19 13 23 9 5 25 5 23 23 19 7 13 9 5 16 5
   10 13 11 25 22 9 17 29 24 12 19 16 19 11 13 21 25 9
   5 25 24 19 7 12 24 19 18 9 27 13 21 5 15 9 8 14 5 15

   En utilisant son hypothèse, Jordana diminue chaque nombre d'un certain nombre n et obtient le message suivant :

   Le mésangeai du Canada est
   un oiseau associé à la
   figure mythologique
   autochtone Wisakedjak

   Quel nombre n Jordana a-t-elle utilisé pour décoder le message?

   (A) 4 **(B)** 5 **(C)** 6 **(D)** 7 **(E)** 8

Solution : Dans le message, le neuvième mot est “a” (Le mésangeai du Canada est un oiseau associé **à** la ...), qui doit avoir été décodé comme un 1. Or, dans le message, nous voyons qu'il est codé comme un 5. Par conséquent, Jordana a dû effectuer la soustraction $5 - 1 = 4$ pour décoder son message. Vérification faite, si nous soustrayons 4 de chacun des chiffres codés, les deux premiers mots codés deviennent

12 5 13 5 19 1 14 7 5 1 9 ...

En utilisant les éléments suivants

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

on voit que l'on obtient

Le mésangeai

et on peut vérifier que nous avons raison.

Réponse : $\boxed{\textbf{(A)}}$

Partie B : 5 points chacune

6. Hiroshi écrit des chiffres en suivant un certain modèle :

$$1234567898765432123456789 87\ldots$$

S'il poursuit ce modèle, quel sera le 2021e chiffre qu'il écrira?

(A) 1 **(B)** 3 **(C)** 5 **(D)** 7 **(E)** 9

Solution 1 : On voit que le motif 1234567898765432 se répète sans cesse. Ce motif est composé de 16 chiffres. Puisque $2021 \div 16 = 126,3125$, cela signifie que nous avons parcouru le motif complet 126 fois et nous avons aussi parcouru une partie d'un autre. Puisque $2021 - 126 \times 16 = 5$ le 2021e chiffre sera le 5e chiffre de notre motif, c'est-à-dire 5.

Solution 2 : Comme pour la première solution, on remarque que le motif comporte 16 chiffres. Notons que

$$2021 = 2000 + 21 = 16 \times 25 + 16 + 5$$

ainsi 2021 a un reste de 5 lorsqu'il est divisé par 16. Par conséquent, le 2021e chiffre sera le 5e chiffre de notre motif, à savoir 5.

Réponse : $\boxed{\textbf{(C)}}$

7. Lequel des énoncés suivant est vrai à propos du nombre $2021 \times 2022 + 2022 \times 2023$?

(A) Il est impair.
(B) Il est un carré parfait.
(C) Il peut être divisé par 2021 sans reste.
(D) Il est premier.
(E) Il peut être divisé par 8 sans reste.

Solution 1 : Puisque $2022 \times 2023 = 2023 \times 2022$ on peut voir $2021 \times 2022 + 2022 \times 2023$ comme 2021 groupes de 2022 auxquels on ajoute 2023 groupes de 2022 ce qui fait 4044 groupes de 2022 ou

$$4044 \times 2022 = 2 \times 2022 \times 2022 = 2 \times 2022^2.$$

On voit que ce nombre est pair, qu'il n'est pas un carré parfait, qu'il n'est pas un multiple de 2021 et qu'il n'est pas premier. Comme $2022 = 2 \times 1011$, notre résultat peut s'écrire comme

$$2 \times (2 \times 1011) \times (2 \times 1011) = 8 \times 1011^2$$

qui peut être divisé par 8 sans reste.

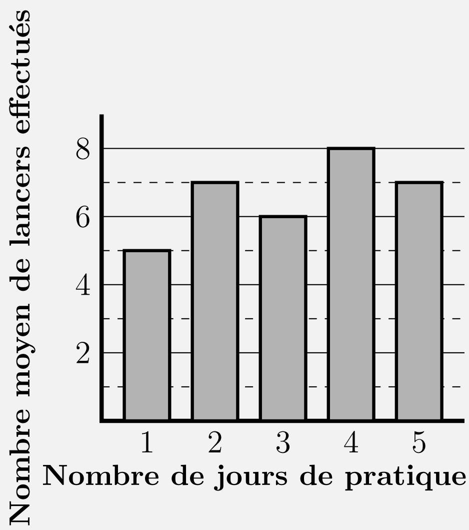
Solution 2 : En utilisant certaines propriétés de l'addition et de la multiplication, on peut écrire

$$\begin{aligned} 2021 \times 2022 + 2022 \times 2023 &= 2021 \times 2022 + 2023 \times 2022 \\ &= (2021 + 2023) \times 2022 \\ &= (2022 - 1 + 2022 + 1) \times 2022 \\ &= 2 \times 2022^2 \end{aligned}$$

et on procède ensuite comme dans la première solution.

Réponse : $\boxed{\textbf{(E)}}$

8. Zacharia pratique le lancer d'anneaux. Il effectue 15 lancers par jour pendant 5 jours. Le diagramme ci-dessous montre son nombre moyen cumulatif de lancers effectués chaque jour. Par exemple, la barre étiquetée 3 montre qu'il a eu une moyenne de 6 lancers effectués chaque jour au cours des 3 premiers jours.



Au quel jour Zacharia a-t-il effectué le moins de lancers?

(A) Jour 1 **(B)** Jour 2 **(C)** Jour 3 **(D)** Jour 4 **(E)** Jour 5

Solution : Soit s_1 le nombre de lancers effectué le premier jour. De façon similaire, soient s_2, s_3, s_4 et s_5 le nombre de lancers effectués respectivement les deuxième, troisième, quatrième et cinquième jours.

D'après le graphe, on sait que $s_1 = 5$. Puisque la moyenne des deux premiers jours est de 7, alors $s_1 + s_2 = 2 \times 7 = 14$. Comme $s_1 = 5$, on peut déterminer que $s_2 = 9$. En procédant de la sorte, on voit que

- $s_1 + s_2 + s_3 = 3 \times 6 = 18$, so $s_3 = 4$,
- $s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 4 \times 8 = 32$, so $s_4 = 14$,
- $s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 = 5 \times 7 = 35$, so $s_5 = 3$,

Ainsi Zaria a marqué le plus petit nombre de ses lancers le cinquième jour.

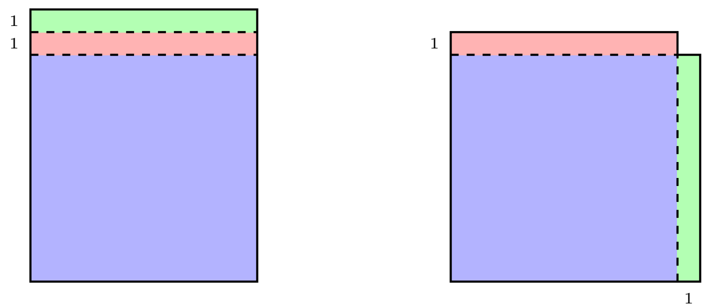
Réponse : $\boxed{\textbf{(E)}}$

9. Des nombres sont dits *consécutifs* lorsqu'ils suivent leur ordre naturel. Par exemple, $17, 18, 19$ sont des *nombres entiers* consécutifs; $11, 13, 17$ sont des *nombres premiers* consécutifs et $25, 36, 49$ sont des *nombres carrés* consécutifs. Lorsqu'on multiplie ensemble deux *nombres impairs* consécutifs, on obtient 1443. Quelle est la somme de ces deux nombres?

   (A) 72 **(B)** 76 **(C)** 80 **(D)** 84 **(E)** 88

Solution 1 : Comme $30 \times 30 = 900$ et $40 \times 40 = 1600$, les deux nombres sont dans la trentaine. Il pourrait s'agir de 31 et 33; de 33 et 35; de 35 et 37; ou de 37 et 39. Cependant, le chiffre des unités de 33×35 et de 35×37 serait 5. Il ne peut donc pas s'agir de ces paires de nombres. Comme 1443 est plus proche de 1600 que de 900, on essaie $37 \times 39 = 1443$. Alors, $37 + 39 = 76$.

Solution 2 : On a un rectangle dont les côtés sont des nombres impairs consécutifs. On peut donc dire qu'il est plus haut de 2 unités que large (voir la figure à gauche).



Découpons une bande de largeur 1 dans le haut (vert) et plaçons-la sur le côté de la figure pour obtenir une figure presque carrée (voir figure de droite) afin d'obtenir une figure qui est presque un carré (voir figure de droite).

L'aire de la figure est toujours de 1443 unités carrées et il ne manque qu'une unité carrée pour former un carré parfait; les côtés du carré serait alors $\sqrt{1444} = 38$ unités. Ainsi, nos deux nombres d'origine étaient 37 et 39.

Réponse : $\boxed{\textbf{(B)}}$

10. Hamza et ses amis participent à un tournoi de jeux vidéo où l'on joue au football en tête-à-tête. Chaque participant joue une partie contre chacun des autres participants. Les participants ont convenu que les points seraient attribués selon le tableau suivant :

Résultat	Victoire	Égalité avec buts	Égalité sans but	Défaite
Points	3	2	1	0

Après que toutes les parties aient été jouées, Hamza a eu 10 points sans avoir subi de défaite.

Laquelle des informations complémentaires suivantes suffit à elle seule à déterminer avec certitude le nombre de participants au tournoi?

(A) Hamza a joué au moins une partie dans chacune des trois autres catégories.
(B) Plus que la moitié des parties jouées par Hamza se sont terminées par une égalité avec des buts.
(C) Quatre des parties jouées par Hamza se sont terminées soit par une victoire, soit par une égalité avec des buts.
(D) Hamza a eu le même nombre de victoires et d'égalités sans but.
(E) Aucune de ces réponses.

Solution : Si l'on peut déterminer le nombre de parties disputées par une personne, alors nous connaîtrons le nombre de personnes (puisque chaque personne joue contre toutes les autres; par exemple, si elles jouent 6 parties alors il doit y avoir 7 personnes). Vérifions les conditions une par une :

(A)
Si Hamza a eu au moins un match dans chacune des autres catégories, nous savons qu'il a obtenu au moins $3 + 2 + 1 = 6$ points. Il lui faut 4 points de plus. Or, il y a plusieurs façons d'y parvenir (une autre victoire et un autre match nul sans buts (5 parties) ; deux autres égalités avec but (5 parties) ; ou 4 autres égalités sans buts (7 parties)), de sorte que nous ne pouvons pas déterminer le nombre de personnes à partir de cette information.

(B) Cette condition peut également être remplie de plusieurs façons : 5 égalités avec buts (5 parties) ; 4 égalités avec buts et 2 égalités sans buts (6 parties) ; ou 3 égalités avec buts, une victoire et une égalité sans buts (5 parties), nous ne pouvons donc pas déterminer le nombre de personnes à partir de cette information.

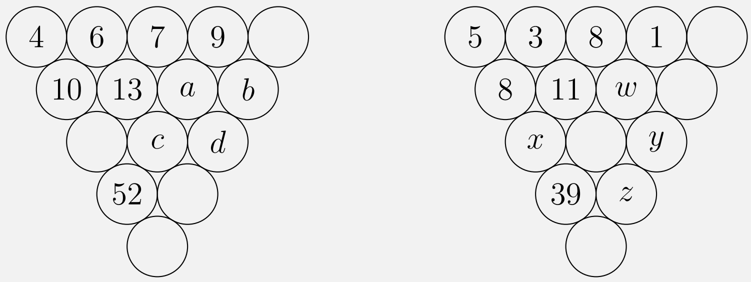
(C) Cette condition peut également être remplie de plusieurs façons : 2 victoires et 2 égalités avec buts (4 parties) ; 1 victoire, 3 égalités avec buts et 1 égalité sans buts (5 parties) ; ou 4 égalités avec buts et 2 égalités sans buts (6 parties). Nous ne pouvons donc pas déterminer le nombre de personnes à partir de cette information.

(D) Cette condition peut également être remplie de plusieurs façons : 2 victoires, 1 égalité avec buts et 2 égalités sans buts (5 partie) ; 1 victoire, 3 égalités avec but et 1 égalité sans buts (5 parties) ; ou 5 égalités avec buts (5 parties). Même si nous ne savons pas lequel de ces cas s'est produit, nous savons que 5 matchs ont été joués et que 6 personnes ont participé.

Réponse : $\boxed{\textbf{(D)}}$

Partie C : 7 points chacune

11. Sarah a demandé à son amie Rina de résoudre les deux puzzles similaires illustrés ci-dessous. Pour toute paire de cercles se trouvant l'un à côté de l'autre, la somme des nombres qu'ils contiennent est inscrite dans le cercle situé directement en dessous d'eux. Par exemple, les deux premiers cercles du **Puzzle 1** contiennent les nombres 4 et 6. La somme de ces deux nombres est 10 et ce nombre est inscrit dans le cercle situé en dessous d'eux. Un puzzle est considéré comme résolu lorsque tous les cercles sont remplis avec les bons nombres.



Puzzle 1 **Puzzle 2**

Laquelle des informations suivantes permettrait à Rina, si elle lui était donnée, de résoudre les deux puzzles?

(A) Les nombres inscrits dans les cercles étiquetés a et y.
(B) Les nombres inscrits dans les cercles étiquetés b et z.
(C) Les nombres inscrits dans les cercles étiquetés c et w.
(D) Les nombres inscrits dans les cercles étiquetés d et x.
(E) Aucune de ces réponses.

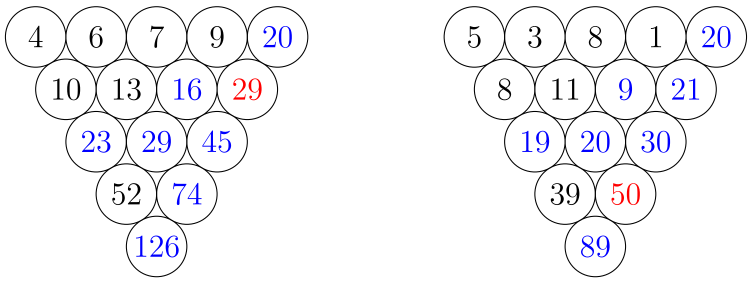
Solution 1 : Dans le **Puzzle 1**, on peut calculer $a = 7 + 9 = 16$ et ensuite $c = 13 + a = 13 + 16 = 29$. Toutefois, on ne peut pas déterminer b ou d. Si l'on connaissait b alors on pourrait calculer le cercle vide au-dessus de lui, puis d, et on serait ensuite capable de compléter le reste du puzzle. De la même manière, si l'on connaissait d, on pourrait compléter le reste du puzzle.

De même, dans le **Puzzle 2**, w et x peuvent être calculés directement. Si l'on connait l'un ou l'autre de y et z, on sera en mesure de terminer le puzzle.

$\therefore$ Si l'on connaissait b et z, on serait en mesure de résoudre les deux puzzles.

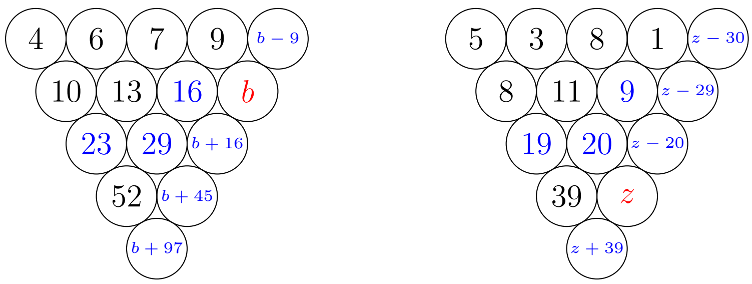
Solution 2 : Le triangle est déterminé en entier si et seulement si le cercle supérieur droit est déterminé. Dans le premier triangle, a et c ne sont pas dans l'"ombre" du cercle supérieur droit, mais b et d le sont. De même, dans le deuxième triangle, seuls y et z peuvent affecter le cercle supérieur droit. Ainsi, les deux seules réponses possibles sont **(B)** ou **(E)**.

Choisissons des nombres b et z pour voir si nous pouvons terminer le puzzle. En choisissant $b = 29$ et $z = 50$, le reste du puzzle peut être complété tel qu'indiqué ci-dessous.



Puzzle 1 **Puzzle 2**

Si l'on considère b et z comme des variables, alors on peut compléter les puzzles en fonction de ces variables.

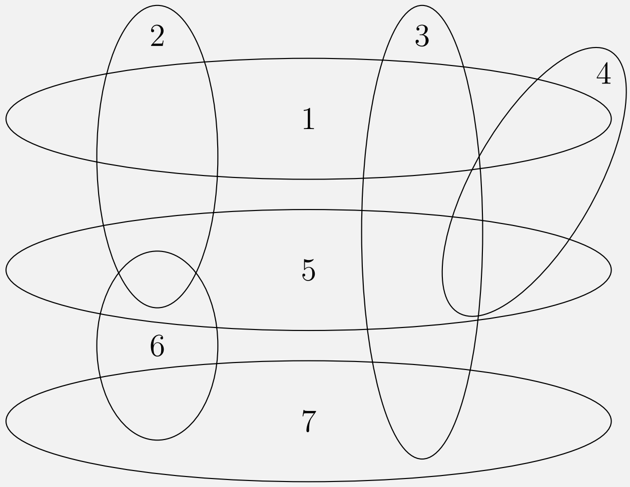


Puzzle 1 **Puzzle 2**

Les deux puzzles peuvent donc être résolus si l'on connaît b et z.

Réponse : $\boxed{\textbf{(B)}}$

12. Il y a sept stations de radio à Jaytown. Celles-ci sont réparties dans toute la ville. Si les régions couvertes par deux stations de radio se chevauchent, elles doivent utiliser des fréquences différentes. Mais si les régions couvertes par les stations de radio ne se chevauchent pas, elles peuvent utiliser la même fréquence.
La figure ci-dessous montre les régions couvertes par chacune des sept stations de radio.



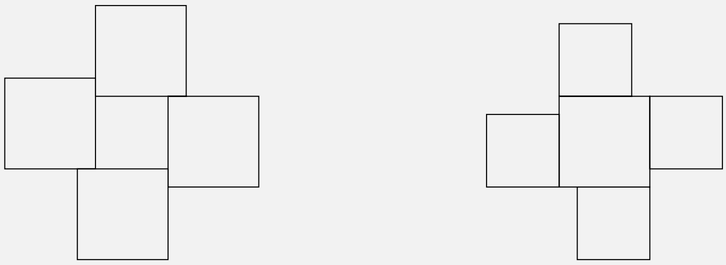
Quel est le plus petit nombre de fréquences que Jaytown peut avoir afin que deux stations de radio qui se chevauchent ne partagent pas la même fréquence?

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5 **(E)** 6

Solution : D'une part, comme les régions couvertes par les stations 1, 3 et 4 se chevauchent (tout comme les régions couvertes par les stations 2, 5 et 6), il faut au moins 3 fréquences. D'autre part, si nous assignons la fréquence A aux stations 1, 5 et 7 ; la fréquence B aux stations 2 et 3 ; et la fréquence C aux stations 4 et 6, nous voyons que les conditions sont satisfaites. Ainsi, le plus petit nombre de fréquences est 3.

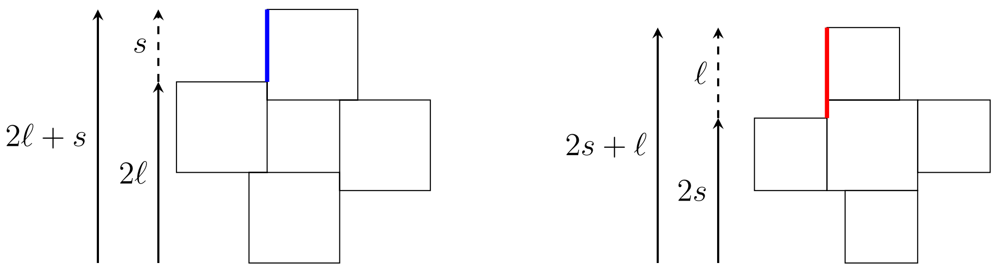
Réponse : $\boxed{\textbf{(B)}}$

13. Vous disposez d'une collection de deux types de carrés : de petits carrés et de grands carrés. Lorsque quatre des grands carrés sont placés autour d'un petit carré (tel qu'illustré à gauche) le périmètre total est de 168 cm. Lorsque quatre des petits carrés sont placés autour d'un grand carré (tel qu'illustré à droite) le périmètre total est de 156 cm. Quelle est l'aire d'un petit carré?

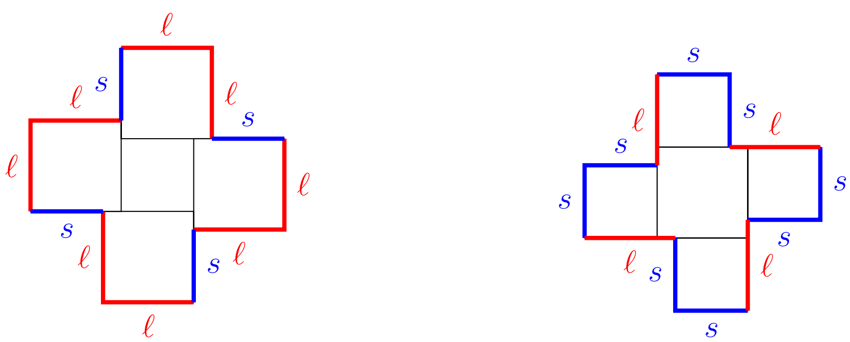


(A) 121 cm^2 **(B)** 144 cm^2 **(C)** 169 cm^2 **(D)** 196 cm^2 **(E)** 225 cm^2

Solution : Soient ℓ et s les longueurs des côtés du plus grand et du plus petit carré, respectivement. Remarquons que la "hauteur" du diagramme de gauche est de $2\ell+s$ alors que la hauteur du sommet du carré de gauche est de 2ℓ. Par conséquent, la longueur du segment de droite en haut du diagramme (en bleu) est de s. De même, à droite, nous trouvons que la longueur correspondante (rouge) est de ℓ.



De la même manière, nous pouvons déterminer les autres côtés du périmètre. En étiquetant les longueurs dans le diagramme, nous obtenons ce qui suit.



Puisque nous connaissons les périmètres, nous pouvons écrire

$$8\ell + 4s = 168$$
$$4\ell + 8s = 156.$$

En divisant les deux équations par 4, on obtient

$$2\ell + s = 42$$
$$\ell + 2s = 39.$$

En additionnant ces deux équations, puis en divisant par 3, on trouve

$$3\ell + 3s = 81 \Rightarrow \ell + s = 27.$$

Soustrayons maintenant les équations afin d'obtenir

$$\ell - s = 3.$$

Nous cherchons donc deux nombres dont la différence est 3 et dont la somme est 27. On déduit aisément que ces nombres sont $\ell = 15$ et $s = 12$, de sorte que l'aire du petit carré est $12^2 = 144$.

Réponse : $\boxed{\textbf{(B)}}$

14. James travaille pour une entreprise de messagerie. Il devait livrer 5 colis. Sa motocyclette consomme 3 litres de carburant pour parcourir 45 km. Le réservoir de sa motocyclette, qui peut contenir 12 litres de carburant, était plein lorsqu'il a commencé ses activités.

    La motocyclette a consommé un quart du carburant au cours de la livraison du premier colis. Au cours de la livraison du deuxième et du troisième colis, la motocyclette a consommé au total la moitié du carburant restant.

    James a réalisé que le carburant restant dans le réservoir après la livraison du troisième colis ne représentait que les trois cinquième de ce dont il avait besoin afin de pouvoir procéder à la livraison des deux derniers colis restant. Il a fait le plein du réservoir de sa motocyclette, puis a terminé les livraisons.

    Quelle distance James a-t-il parcouru pour livrer les 5 colis?

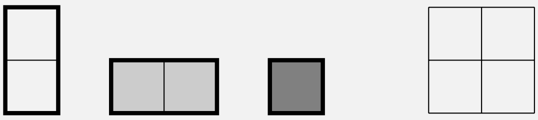
    (A) 180 km **(B)** 210 km **(C)** 225 km **(D)** 240 km **(E)** 270 km

Solution : Pour livrer le premier colis, James a consommé $12 \div 4 = 3$ litres. Il lui reste donc$12 - 3 = 9$ litres. TPour livrer les deuxième et troisième colis, il a consommé $9 \div 2 = 4.5$ litres et il lui reste 4.5 litres. Comme il n'a que $\frac{3}{5}$ de carburant nécessaire, pour les livraisons restantes, il a besoin de $\frac{2}{5}$ de carburant supplémentaire, soit $\frac{2}{3}$ de la quantité qu'il a déjà. Il lui faut donc $(2 \div 3) \times 4.5 + 4.5 = 7.5$ litres. Le carburant total pour livrer les 5 colis était donc de $(3 + 4.5 + 7.5 = 15)$ litres. La distance totale qu'il a parcourue était donc de

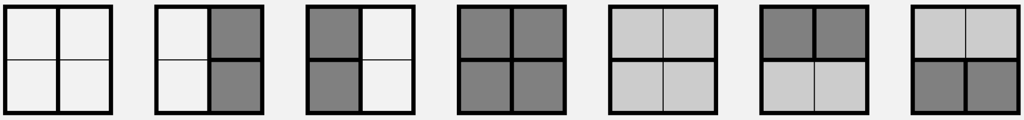
$$15 \times 45 \div 3 = 225 \text{ km}.$$

Réponse : $\boxed{\textbf{(C)}}$

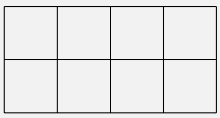
15. On dispose d'un certain nombre de tuiles 2×1, 1×2 et 1×1. On désire se servir de ces tuiles pour paver un carré 2×2.



Notons qu'il existe 7 différentes façons (illustrées ci-dessous) de réaliser un tel pavage.

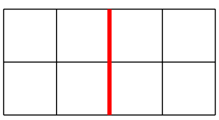


De combien de façons différentes peut-on paver le rectangle 2×4 (illustré ci-dessous) en utilisant ces tuiles?



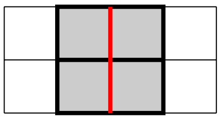
(A) 49 **(B)** 55 **(C)** 63 **(D)** 71 **(E)** 81

Solution 1 : Traçons une ligne verticale au centre du rectangle 2×4. On compte séparément les pavages qui ne traversent pas la ligne verticale et ceux qui la traversent.



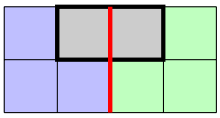
Cas 1 : Aucune tuile ne traverse la ligne verticale.
On a alors deux carrés 2×2 distincts qui peuvent chacun être pavés de 7 façons. Le nombre total de pavages de ce type est donc de $7 \times 7 = 49$ façons.

Cas 2 : Tant le segment du haut que le segment du bas de la ligne verticale sont traversés.
Cela ne peut se produire que si nous avons deux tuiles de 1×2 au milieu, comme indiqué ci-dessous.

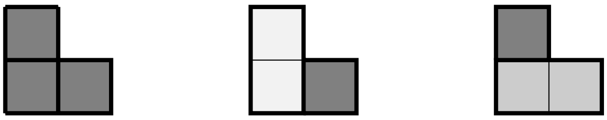


On se retrouve donc avec deux régions 2×1, chacun pouvant être pavée de 2 façons (une tuile 2×1 ou deux tuiles 1×1). Le nombre total de pavages de ce type est donc de $2 \times 2 = 4$.

Cas 3 : Une seule tuile traverse la ligne verticale.
Si la tuile qui croise se trouve en haut, alors on a le diagramme ci-dessous.



Notons qu'on doit paver deux régions en forme de "L" (une en bleu et son inverse en vert). Chaque "L" peut être pavé de 3 façons (celles pour la région en bleu son montrées ci-dessous et il y en a des similaires pour la région en vert).



Le nombre total de tuiles de ce type est donc de $3 \times 3 = 9$.

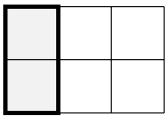
De la même façon, si la tuile qui croise se trouve en bas, on se retrouve avec deux régions en forme de "L" et celles-ci peuvent être pavées de 9 façons.

$\therefore$ Le nombre total de pavages est $49 + 4 + 9 + 9 = 71$.

Solution 2 : On procède de façon systématique en examinant des rectangles de plus en plus longs. Nous savons qu'il y a deux façons de paver un rectangle de 2×1 (voir ci-dessous) et on mentionne dans l'énoncé du problème qu'il y a 7 façons de paver un rectangle de 2×2.

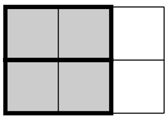
On traite ensuite le cas d'un rectangle 2×3. On considère 3 cas selon la tuile qui se trouve dans le coin inférieur gauche.

Cas 1 : Une tuile 2×1 dans le coin inférieur gauche.
Dans ce cas, on se retrouve avec un carré 2×2 qui, comme on le sait, peut être pavé de 7 façons.

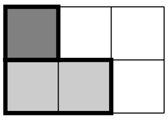


Cas 2 : Une tuile 1×2 dans le coin inférieur gauche.
Nous avons maintenant deux choix pour ce qui se trouve dans le coin supérieur gauche.

Si l'on met une autre tuile 1×2, alors on se retrouve avec une région 2×1 pouvant être pavée de 2 façons.



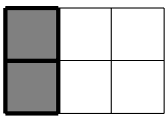
Si l'on met une tuile 1×1, alors on se retrouve avec un "L" qui peut être pavé de 3 façons.



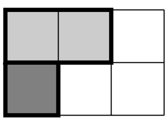
Il y a donc $2 + 3 = 5$ façons de traiter ce cas.

Cas 3 : Une tuile 1×1 dans le coin inférieur gauche.
Nous avons maintenant deux choix pour la tuile qui va dans le coin supérieur gauche.

Si l'on met une autre tuile 1×1, alors on se retrouve avec un carré 2×2 qui peut être pavé de 7 façons.



Si l'on met une tuile 1×2, alors on se retrouve avec un "L" pouvant être pavé de 3 façons.

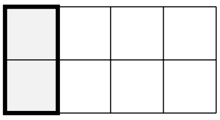


Il y a donc $7 + 3 = 10$ façons de traiter ce cas.

Il y a donc $7 + 5 + 10 = 22$ façons de paver un rectangle 2×3.

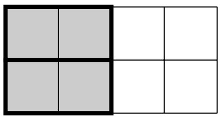
Passons enfin au cas d'un rectangle 2×4. En procédant de la même manière que pour le rectangle 2×3 , on examine une fois de plus 3 cas :

Cas 1 : Une tuile 2×1 dans le coin inférieur gauche.
Dans ce cas, on se retrouve avec un rectangle 2×3 qui, comme on le sait, peut être pavé de 22 façons.

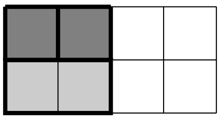


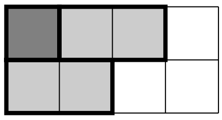
Cas 2 : Une tuile 1×2 dans le coin inférieur gauche.
Nous avons maintenant deux choix pour ce qui se trouve dans le coin supérieur gauche.

Si l'on met une autre tuile 1×2, alors on se retrouve avec une région 2×2 qui peut être pavée de 7 façons.



Si l'on met une tuile 1×1, alors on peut mettre à son côté une autre tuile 1×1 et il reste ensuite une région 2×2 pouvant être pavée de 7 façons (ci-dessous à gauche) ou nous pouvons mettre une tuile 1×2 à côté d'elle et il nous reste alors une région en forme de "L" qui peut être pavée de 3 façons (ci-dessous à droite).



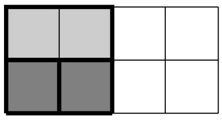


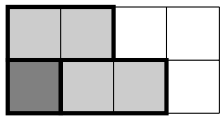
Il y a donc $7 + 7 + 3 = 17$ façons de traiter ce cas.

Cas 3 : Une tuile 1×1 dans le coin inférieur gauche.
On a maintenant deux choix pour ce qui se trouve dans le coin supérieur gauche.

Si l'on met une autre tuile 1×1 on se retrouve avec un rectangle 2×3 pouvant être pavé de 22 façons.

Si l'on met une tuile 1×2, on se retrouve avec un "L" épais. Si l'on place une autre tuile 1×1 à côté du premier, on obtient un carré 2×2 qui peut être pavé de 7 façons (en bas à gauche). Si l'on place plutôt une tuile 1×2 à côté de la tuile 1×1, alors on obtient un "L" qui peut être pavé de 3 façons (en bas à droite).





Il y a donc $22 + 7 + 3 = 32$ façons de traiter ce cas.

Ainsi, il y a $22 + 17 + 32 = 71$ façons de paver un rectangle 2 par 3.

Réponse : $\boxed{\textbf{(D)}}$