Olympiade mathématique
du Canada

Solutions officielles - 2023 OMC

P1. William pense à un nombre entier compris entre 1 et 50, inclusivement. Victor peut choisir un nombre entier positif m et demander à William : “Est-ce que m divise ton nombre ?”. William doit alors répondre véridiquement. Victor continue à poser des questions jusqu’à ce qu’il détermine le nombre de William. Quel est le nombre minimum de questions que Victor doit poser pour garantir cela ?

Solution. Le nombre minimum de questions est 15.

Tout d’abord, on montre que 14 questions ou moins ne suffisent pas à garantir le succès. Supposons que Victor pose au plus 14 questions et que William réponde par ”non” à chaque question, sauf si $m = 1$. Notons que ces réponses sont compatibles avec le fait que le nombre secret est 1. Mais comme il y a 15 nombres premiers inférieurs à 50, un certain nombre premier p n’a jamais été choisi en guise de m. Cela signifie que les réponses sont également compatibles avec le fait que le nombre secret soit p. Par conséquent, Victor ne peut pas déterminer le nombre avec certitude car 1 et p sont deux options possibles.

On montre maintenant que Victor peut toujours déterminer le nombre avec 15 questions. Soit N le nombre secret de William. Tout d’abord, Victor pose 4 questions, avec $m = 2, 3, 5$ et 7. On s’intéresse ensuite aux réponses de William.

Case 1. *William répond ”non” aux quatre questions.*

N ne peut être divisible que par des nombres premiers égaux ou supérieurs à 11. Cela signifie que N ne peut pas avoir plusieurs facteurs premiers (sinon $N \geq 11^2 > 50$), donc soit $N = 1$, soit N est l’un des 11 nombres premiers restants inférieurs à 50. Victor peut alors poser 11 questions avec $m = 11, 13, 17, \ldots, 47$, à savoir une pour chacun des nombres premiers restants, afin de déterminer la valeur de N.

Case 2. *William répond ”oui” à $m = 2$ et ”non” à $m = 3, 5$ et 7.*

Il n’y a que 11 valeurs possibles de N qui correspondent à ces réponses (2, 4, 8, 16, 22, 26, 32, 34, 38, 44 et 46). Victor peut utiliser ses 11 questions restantes pour chacune de ces possibilités.

Case 3. *William répond ”oui” à $m = 3$ et “non” à $m = 2, 5$ et 7.*

Il y a 5 valeurs possibles de N (3, 9, 27, 33 et 39). Comme dans le cas 2, Victor peut poser des questions sur chacun de ces 5 nombres pour déterminer la valeur de N.

Copyright © 2023, Soci´et´e math´ematique du Canada. Tous droits réservés.

Case 4. *William répond "oui" à plusieurs questions, ou un "oui" à $m = 5$ ou $m = 7$.*

Soit k le produit de tous les m qui ont reçu une réponse positive. Puisque N est divisible par chacun de ces m, N doit être divisible par k. Puisque $k \geq 5$, il y a au plus 10 multiples de k entre 1 et 50. Victor peut poser des questions sur chacun de ces multiples de k avec ses questions restantes. $\square$

Copyright © 2023, Soci´et´e math´ematique du Canada. Tous droits réservés.

P2. Il y a 20 élèves dans une classe d'école secondaire et chaque élève a exactement trois amis intimes dans la classe. Cinq des élèves ont acheté des billets pour un concert à venir. Si un élève voit que deux ou plusieurs de ses trois amis intimes ont acheté des billets, il en achètera un aussi.

Est-il possible que tous les élèves de la classe achètent des billets pour le concert ?

(On suppose que l'amitié est mutuelle ; si l'élève A est un ami intime de l'élève B, alors B est un ami intime de l'élève A).

Solution 1. Il est impossible que tous les élèves de la classe achètent des billets pour le concert.

Si deux élèves A et B sont des amis intimes et si A a acheté un billet pour le concert tandis que B ne l'a pas fait, alors A *incite* B. On appelle cette paire (A, B) une *incitation*.

Pour qu'un élève change d'avis et achète un billet, il doit d'abord être incité par au moins 2 de ses 3 amis intimes. Cela signifie qu'il ne peut inciter qu'un seul autre ami. Par conséquent, le nombre total d'incitations parmi les élèves diminue de 1 chaque fois qu'un élève change d'avis et achète un billet.

Au départ, le nombre maximum d'incitations est de 15 (chacun des 5 premiers élèves ayant des billets a 3 amis à inciter). Supposons, en vue d'obtenir une contradiction, que toute la classe achète des billets. Après que les 14 premières personnes ont acheté des billets, le nombre d'incitations est au maximum de $15 - 14 = 1$. Cela n'est pas suffisant pour convaincre la dernière personne d'acheter un billet, puisqu'elle a besoin de 2 incitations.

Il est donc impossible que toute la classe achète des billets. $\square$

Solution 2. On utilisera le terme *amitié* pour désigner une paire non ordonnée d'élèves qui sont des amis intimes. Comme chacun des 20 élèves fait partie d'exactement 3 amitiés, il y a exactement 30 amitiés dans la classe. (Nous pourrions également représenter les amitiés comme des arêtes dans un graphe non orienté dont les sommets sont les 20 élèves).

On dira d'une amitié qu'elle est *consommée* si l'un des élèves de cette amitié achète un billet après les cinq premiers acheteurs et que, à ce moment-là, l'autre étudiant possède déjà un billet. Chaque fois qu'un billet est acheté après les cinq premiers acheteurs, au moins deux amitiés sont consommées. Observons qu'aucune amitié n'est consommée deux fois.

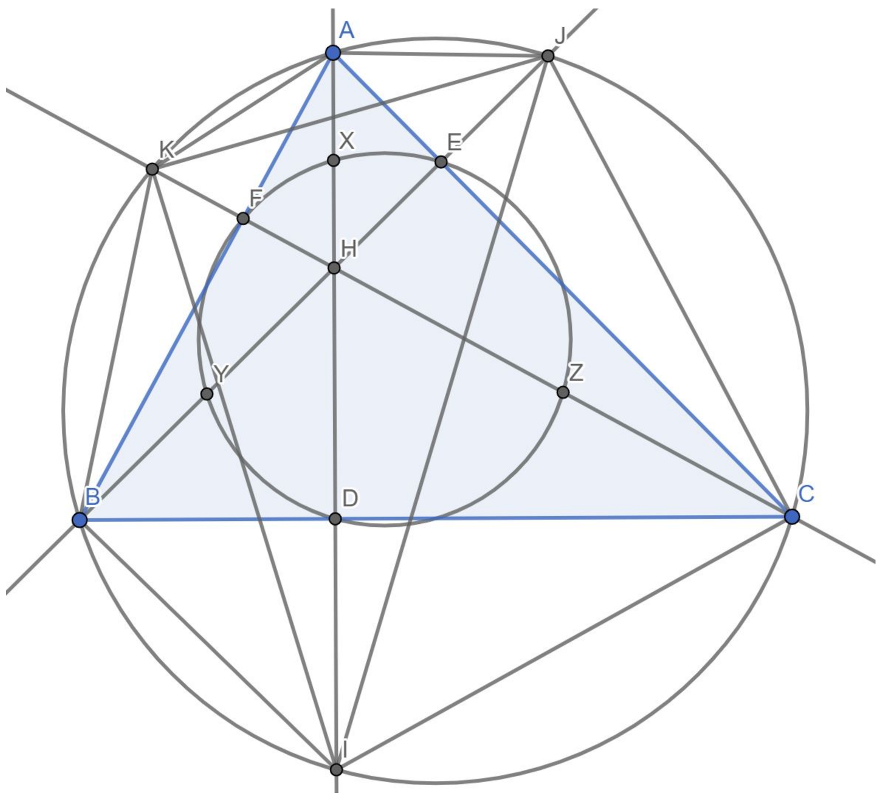
Si les 20 élèves achètent des billets, alors trois amitiés sont consommées lorsque le dernier élève achète un billet. Cela implique que le nombre d'amitiés consommées est au moins $14 \times 2 + 3 = 31$, ce qui est supérieur au nombre d'amitiés. Cette contradiction prouve qu'il n'est pas possible que toute la classe achète des billets. $\square$

Copyright © 2023, Soci´et´e math´ematique du Canada. Tous droits réservés.

P3. Un triangle acutangle est un triangle dont les trois angles sont aigus (inf´erieur ‘a 90°). Soit ABC un triangle acutangle dont les hauteurs AD, BE et CF se rencontrent en un point H. Le cercle passant par les points D, E et F rencontre AD, BE et CF à nouveau en X, Y et Z respectivement. Prouvez l'inégalité suivante :

$$\frac{AH}{DX} + \frac{BH}{EY} + \frac{CH}{FZ} \geq 3.$$

Solution. Soit le cercle circonscrit à ABC qui rencontre les hauteurs AD, BE et CF à nouveau en I, J et K respectivement.



Lemma (cercle des neuf points)**.** *I, J, K sont les réflexions de H sur BC, CA et AB. De plus, D, E, F, X, Y et Z sont les points milieux de HI, HJ, HK, HA, HB et HC.*

Proof. Comme $ABDE$ et $ABIC$ sont cycliques, on voit que

$$\angle EBD = \angle EAD = \angle CAI = \angle CBI.$$

Les droites BI et BH sont donc des réflexions sur BC. De même, CH et CI sont des réflexions sur BC, donc I est la réflexion de H sur BC. Les affirmations analogues pour J et K s'ensuivent. Une dilatation $\times 2$ de H établit maintenant le résultat. □

Copyright © 2023, Soci´et´e math´ematique du Canada. Tous droits réservés.

Par le lemme, on obtient $AI = 2XD$, $BJ = 2EY$ et $CK = 2FZ$. Cela est donc équivalent à montrer que

$$\frac{AH}{2DX} + \frac{BH}{2EY} + \frac{CH}{2FZ} \geq \frac{3}{2},$$

qui est à son tour équivalent à

$$\frac{AH}{AI} + \frac{BH}{BJ} + \frac{CH}{CK} \geq \frac{3}{2}. \tag{*}$$

Soit $a = JK$, $b = KI$ et $c = IJ$. Toujours en vertu du lemme, on trouve $AH = AK = AJ$, donc par le théorème de Ptolémée appliqué à $AKIJ$,

$$AJ \cdot KI + AK \cdot IJ = AI \cdot JK.$$

Subsituons et arrangeons les termes :

$$\begin{aligned} AH \cdot b + AH \cdot c &= AI \cdot a \\ AH \cdot (b + c) &= AI \cdot a \\ \frac{AH}{AI} &= \frac{a}{b+c}. \end{aligned}$$

De la même façon,

$$\frac{BH}{BJ} = \frac{b}{c+a} \qquad \text{et} \qquad \frac{CH}{CK} = \frac{c}{a+b}.$$

En replaçant ces éléments dans (*), l'inégalité souhaitée devient

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

C'est ce qu'on appelle l'inégalité de Nesbitt, pour laquelle il y a de nombreuses preuves. L'une de ces preuves est présentée ci-dessous.

Ajoutons 3 aux deux côtés et réarrangeons les termes :

$$\begin{aligned} &\left(\frac{a}{b+c} + 1\right) + \left(\frac{b}{c+a} + 1\right) + \left(\frac{c}{a+b} + 1\right) \geq \frac{3}{2} + 3 \\ \iff \quad & \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{c+a} + \frac{a+b+c}{a+b} \geq \frac{9}{2} \\ \iff \quad & (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) \geq \frac{9}{2} \\ \iff \quad & \frac{(b+c) + (c+a) + (a+b)}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}} \end{aligned}$$

ce qui est vrai en vertu de l'inégalité arithmético-harmonique. □

Copyright © 2023, Soci´et´e math´ematique du Canada. Tous droits réservés.

P4. Soit $f(x)$ un polynôme non-constant à coefficients entiers tel que$f(1) \neq 1$. Pour un entier positif n, on définit $\operatorname{divs}(n)$ comme l'ensemble des diviseurs positifs de n.

Un entier positif m est *f-sympa* s'il existe un entier positif n pour lequel

$$f[\operatorname{divs}(m)] = \operatorname{divs}(n).$$

Prouvez que pour tout tel f, il existe un nombre fini d'entiers f-sympas.

(La notation $f[S]$ pour un certain ensemble S désigne l'ensemble $\{f(s) : s \in S\}$.)

Remark 1. *L'énoncé original du problème allait comme suit : "Pour un polynôme non constant donné $f(x) \neq x$, prouvez qu'il existe un nombre fini d'entiers composés f-sympas". Notons que cela autorise $f(1) = 1$. Comme défi supplémentaire, essayez ce problème!*

Solution. Supposons, en vue d'obtenir une contradiction, qu'il existe une infinité d'entiers f-sympas.

Si $f(x)$ a un coefficient directeur négatif, alors un entier f-sympa suffisamment grand m vérifiera $f(m) < 0$. Mais cela implique que m n'est pas f-sympa, ce qui constitue une contradiction.

Ainsi $f(x)$ a un coefficient directeur positif, de sorte que nous pouvons choisir un N tel que pour tout $m > N$,

$$f(m) > \max(f(1), f(2), \ldots, f(m-1)).$$

Cela signifie que $f(m)$ est la plus grande valeur de $f[\operatorname{divs}(m)]$, donc si m est f-sympa avec $f[\operatorname{divs}(m)] = \operatorname{divs}(n)$, alors on doit avoir $n = f(m)$, puisque n est la plus grande valeur de $\operatorname{divs}(n)$. En d'autres termes,

$$f[\operatorname{divs}(m)] = \operatorname{divs}(f(m))$$

pour tout f-sympa $m > N$.

Pour chacun de ces m's, $1 \in \operatorname{divs}(f(m))$, il doit donc y avoir un $k \in \operatorname{divs}(m)$ tel que $f(k) = 1$. Soient $k_1, k_2, \ldots, k_n$ les solutions de $f(x) = 1$. Ainsi tout f-sympa $m > N$ est divisible par un certain $k \in \{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$. Puisqu'il existe une infinité de tels m et une infinité de k, par le principe des tiroirs, il existe un certain k qui divise une infinité d'entiers f-sympa m. (Notons que $k \neq 1$ puisque $f(1) \neq 1$).

Pour tout f-sympa $m > N$ divisible par k, on a

$$f\left(\frac{m}{k}\right) \in f[\operatorname{divs}(m)] = \operatorname{divs}(f(m)) \implies f\left(\frac{m}{k}\right) \mid f(m).$$

Ainsi, $f(x) \mid f(kx)$ a une infinité de solutions entières positives. Posons $d = \deg(f)$ et écrivons

$$\frac{f(kx)}{f(x)} = k^d + \frac{g(x)}{f(x)},$$

pour un certain $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ avec $\deg(g) < d$. Si $g(x) \neq 0$, alors pour x suffisamment grand, nous avons $0 < |g(x)| < f(x)$ car $\deg(f) > \deg(g)$. Mais dans ce cas $\frac{f(kx)}{f(x)} - k^d = \frac{g(x)}{f(x)}$ ne peut pas être un entier, ce qui nous donne la contradiction désirée.

Copyright © 2023, Soci´et´e math´ematique du Canada. Tous droits réservés.

Ainsi $g(x) = 0$, d'où $f(kx) = k^d f(x)$, c'est-à-dire. $f(x) = ax^d$ pour un certain entier positif a. Si $a = 1$ alors $f(1) = 1$, ce qui constitue une contradiction. Mais si $a > 1$, alors $f(x) = 1$ n'a pas de solution entière, ce qui constitue une autre contradiction. $\square$

Copyright © 2023, Soci´et´e math´ematique du Canada. Tous droits réservés.

P5. Dans un pays comptant n villes, des routes à double sens relient certaines paires de villes.

Quelqu'un remarque que si le pays est divisé en deux parties de quelque manière que ce soit, il y aura au plus kn routes entre les deux parties (où k est un nombre entier positif fixe).

Quel est le plus grand nombre entier m (en termes de n et k) tel qu'il est garanti qu'il existe un ensemble de m villes, dont aucune n'est directement reliée par une route ?

Solution. La réponse est $m = \left\lceil \frac{n}{4k} \right\rceil$

Nous dirons qu'un ensemble de villes est *indépendantes* si aucune paire de villes de l'ensemble n'est reliée par une route. Soit r et k des entiers tels que $n = 4kq + r$ où $1 \leq r \leq 4k$.

On montre d'abord que $m \leq \left\lceil \frac{n}{4k} \right\rceil = q + 1$. Désignons par $K_1 i$ un ensemble de i villes tel que chaque paire de villes dans K_i est reliée par une route. Considérons un pays contenant q copies de K_{4k} et une copie de K_r. Un ensemble indépendant de villes dans ce pays contient au plus une ville de chaque K_{4k} ou K_r et contient donc au plus $q + 1$ villes. Notons maintenant que toute partition des villes du pays en deux nouveaux pays partitionne chaque K_{4k} et K_r en deux ensembles. Si K_i où $i \leq 4k$ est partitionné en deux ensembles de villes de tailles a et b, alors le nombre de routes entre les deux ensembles est $ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} \leq ki$. En additionnant cette inégalité pour toutes les copies de K_{4k} et K_r, on obtient qu'il y a au plus kn routes entre les deux nouveaux pays. Ceci implique que ce pays particulier satisfait la condition donnée et il s'ensuit que $m \leq \left\lceil \frac{n}{4k} \right\rceil$.

On montre maintenant que tout pays satisfaisant à la condition donnée possède un ensemble indépendant contenant au moins $\left\lceil \frac{n}{4k} \right\rceil$ villes. On dit d'un ensemble de villes qu'il est *i-séparable* s'll peut être partionné en i ensembles indépendants de villes. Étant donné un pays satisfaisant ces conditions, notons S le plus grand ensemble de villes du pays qui soit $2k$-séparable. Nous prouverons que $|S| \geq n/2$. Par définition de S, il existe une partition $A_1, A_2, \ldots, A_{2k}$ des villes de S telle que chaque A_i est indépendant. Soit $|S| = t$. Supposons, en vue d'obtenir une contradiction, que $t < \frac{n}{2}$. Il y a au plus kn routes entre S et le reste du pays, ce qui – par le principe des tiroirs – implique qu'il y a une ville u qui n'est pas dans S et qui est reliée par une route à au plus $\frac{kn}{n-t} < 2k$ villes. Par conséquent, u est reliée par une route à au plus $2k - 1$ villes de S et il doit y avoir un sous-ensemble indépendant A_i tel que u n'est reliée par une route à aucune ville de A_i. L'ajout de u à S maintient le fait que S est $2k$-séparable mais contredit sa maximalité. Il s'ensuit que $t \geq \frac{n}{2}$. Par le principe des tiroirs, l'un des ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_{2k}$ doit contenir au moins $\frac{t}{2k} \geq \frac{n}{4k}$ villes. Cela achève la démonstration de l'affirmation et on conclu que $m = \left\lceil \frac{n}{4k} \right\rceil$. $\square$

Copyright © 2023, Soci´et´e math´ematique du Canada. Tous droits réservés.