Olympiade mathématique junior du Canada
Ensemble de problèmes officiel 2024

Canadian Mathematical Society
Société mathématique du Canada

J1. Il y a des siècles, le pirate Capitaine Tableauvert a enterré une grande quantité de trésors dans une seule cellule d'une île structurée en grille de 2×4. Vous et votre équipage avez atteint l'île et avez apporté des détecteurs de trésor spéciaux pour trouver la cellule contenant le trésor. Chaque détecteur peut être configuré afin qu'il scanne une sous-grille spécifique $[a, b] \times [c, d]$ avec $1 \le a \le b \le 2$ et $1 \le c \le d \le 4$. L'utilisation du détecteur vous dira si le trésor se trouve dans la région ou non, mais elle ne pourra pas vous dire à quel endroit de la région le trésor a été détecté. Vous prévoyez d'installer Q détecteurs, qui ne peuvent être utilisés simultanément que lorsque tous les Q détecteurs sont prêts. Quel est la valeur de Q minimale requise pour garantir que votre équipe puisse déterminer l'emplacement du trésor légendaire du Capitaine Tableauvert ?

J2. Initialement, trois points non colinéaires, A, B et C, sont inscrits dans le plan. Vous disposez d'un crayon et d'une règle graduée à double tranchant de largeur 1. En les utilisant, vous pouvez effectuer les opérations suivantes :

—Marquer un point arbitraire dans le plan.

—Marquer un point arbitraire sur une ligne déjà tracée.

—Si deux points P_1 et P_2 sont marqués, tracer la droite reliant P_1 et P_2.

—Si deux lignes non parallèles ℓ_1 et ℓ_2 sont tracées, marquer l'intersection de ℓ_1 et ℓ_2.

—Si l'on trace une ligne ℓ, tracer une ligne parallèle à ℓ qui est à une distance de 1 de ℓ (deux lignes de ce type peuvent être tracées).

Montrez qu'il est possible de marquer l'orthocentre de ABC en utilisant ces opérations.

J3. Soit ABC un triangle dont le centre du cercle inscrit est I. Supposons que la réflexion de AB sur CI et la réflexion de AC sur BI se coupent en un point X. Montrez que XI est perpendiculaire à BC.

(Le centre du cercle inscrit est le point d'intersection des trois bissectrices des angles du triangle).

J4. Jeanne écrit 2024 nombres entiers naturels sur un cercle. Elle veut que les 2024 produits de paires de nombres adjacents soient exactement les éléments de l'ensemble $\{1!, 2!, \ldots, 2024!\}$. Peut-elle parvenir à le faire ?

J5. Soit N le nombre d'entiers positifs à 10 chiffres $\overline{d_9 d_8 \ldots d_1 d_0}$ à base 10 (où $0 \le d_i \le 9$ pour tout i et $d_9 > 0$) tels que le polynôme

$$d_9 x^9 + d_8 x^8 + \cdots + d_1 x + d_0$$

est irréductible sur $\mathbb{Q}$. Montrez que N est pair.

(Un polynôme est irréductible sur $\mathbb{Q}$ s'il ne peut être factorisé en deux polynômes non constants avec coefficients rationnels).