Olympiade mathématique du Canada

Solutions officielles – OMC 2024

P1. Soit ABC un triangle dont le centre du cercle inscrit est I. Supposons que la réflexion de AB sur CI et la réflexion de AC sur BI se coupent en un point X. Montrez que XI est perpendiculaire à BC.

(Le centre du cercle inscrit est le point où les trois bissectrices se rencontrent).

Solution. Supposons que la réflexion de AC sur BI coupe BC en un point E. Définissons F de la même façon pour la réflexion de AB sur CI. Supposons aussi que CI coupe AB en un point M et que BI coupe AC en un point N. Puisque CA et $CF = BC$ sont des réflexions sur CI, de même que MA et $MF = XM$, on a que A et F sont des réflexions sur CI. De même A et E sont des réflexions sur BI. Ainsi $\angle XFC = \angle BAC = \angle XEB$ si $\angle BAC$ est aigu (et $\angle XFC = \angle XEB = \pi - \angle BAC$ lorsque $\angle BAC$ est obtus), donc $XF = XE$. De plus, on trouve aussi que $IF = IA = IE$ par les propriétés de réflexion susmentionnées, donc XI est la médiatrice de EF et est donc perpendiculaire à BC. $\square$

P2. Jeanne écrit 2024 nombres naturels le long d'un cercle. Elle veut que les 2024 produits de paires de nombres adjacents soient exactement l'ensemble $\{1!, 2!, \ldots, 2024!\}$. Peut-elle y parvenir ?

Solution 1. Etant donné un nombre premier p et un entier positif x, notons $v_p(x)$ la plus grande puissance de p divisant x. On affirme que Jeanne ne peut pas écrire 2024 tels nombres car cela impliquerait que $1! \cdot 2! \cdot 2024!$ est le carré du produit des 2024 nombres. Soit p un nombre premier et k un entier naturel tel que $k < p$, $kp \leq 2024$ et $(k+1)p > 2024$. On note alors que

$$v_p(1! \cdot 2! \cdots 2024!) = (2024 - p + 1) + (2024 - 2p + 1) + \ldots + (2024 - kp + 1).$$

En particulier, soit p dans $(\frac{2024}{4}, \frac{2024}{2})$. Par le postulat de Bertrand, un tel nombre premier p existe (et p doit aussi être impair). De plus, le k correspondant est soit 2, soit 3. Quoi qu'il en soit, $v_p(1! \cdot 2! \cdots 2024!)$ est impair d'après la formule ci-dessus. Ainsi $1! \cdot 2! \cdot 2024!$ ne peut pas être un carré parfait. $\square$

Solution 2. Comme pour la première solution, on prouve que $1! \cdot 2! \cdots 2024!$ n'est pas un carré parfait. Pour ce faire, notons qu'on peut réécrire le produit comme $(1!)^2 \cdot 2 \cdot (3!)^2 \cdot 4 \cdots (2023!)^2 \cdot 2024$ et de là on tire

$$2 \cdot 4 \cdots 2024 \cdot (1! \cdot 3! \cdots 2023!)^2 = 1012! \cdot (2^{1012} \cdot 1! \cdot 3! \cdots 2023!)^2.$$

Il suffit donc de vérifier que 1012! n'est pas un carré parfait. Cela peut être vérifié soit en remarquant que le nombre premier 1009 n'apparaît qu'une seule fois comme facteur de 1012!, soit en évaluant $v_2(1012!) = 1005$. $\square$

P3 : Soit N le nombre d'entiers positifs à 10 chiffres $\overline{d_9d_8\ldots d_1d_0}$ en base 10 (où $0 \le d_i \le 9$ pour tous i et $d_9 > 0$) tels que le polynôme

$$d_9x^9 + d_8x^8 + \cdots + d_1x + d_0$$

est irréductible dans $\mathbb{Q}$. Montrez que N est pair.

(Un polynôme est irréductible dans $\mathbb{Q}$ s'il ne peut être factorisé en deux polynômes non constants à coefficients rationnels).

Solution. Soit $f(x) = d_9x^9 + d_8x^8 + \cdots + d_1x + d_0$. Si $d_0 = 0$, alors $f(x)$ est divisible par x et donc réductible ; on peut donc ignorer tous ces polynômes. Les polynômes restants ont tous des coefficients premiers et constants non nuls.

Pour tout polynôme $p(x)$ de degré n à coefficients directeur et constant non nuls, disons $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, définisson $\overline{p}(x)$ comme étant le polynôme inversé $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$. $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$. Observons que $\overline{p}(x)$ est également de degré n et que, de plus, $\overline{p}(x) = x^n \left(a_0 + a_1\left(\frac{1}{x}\right) + \cdots + a_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1} + a_n\left(\frac{1}{x}\right)^n\right) = x^np\left(\frac{1}{x}\right)$.

On considère l'appariement de chaque $f(x)$ avec $\overline{f}(x)$ chaque fois que $f(x) \neq \overline{f}(x)$. Si $f(x)$ est réductible, il peut être factorisé sous la forme $f(x) = g(x)h(x)$, où $\deg g, \deg h \ge 1$. Comme les coefficients directeur et constant de $f(x)$ sont non nuls, les coefficients directeurs et constants de $g(x)$ et $h(x)$ le sont aussi. Par conséquent, $\overline{g}(x)$ et $\overline{h}(x)$ sont bien définis avec $\deg \overline{g} = \deg g \ge 1$ et $\deg \overline{h} = \deg h \ge 1$. En outre,

$$\overline{f}(x) = x^9 f\left(\frac{1}{x}\right) = x^9 g\left(\frac{1}{x}\right) h\left(\frac{1}{x}\right) = \left(x^{\deg g} g\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(x^{\deg h} h\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \overline{g}(x)\overline{h}(x).$$

Ainsi, $\overline{f}(x) = \overline{g}(x)\overline{h}(x)$ est une factorisation de $\overline{f}(x)$ en deux polynômes non constants, donc $\overline{f}(x)$ est également réductible. Par conséquent, $f(x)$ est irréductible si et seulement si $\overline{f}(x)$ est irréductible. Donc, en considérant chaque paire, il y a un nombre pair de polynômes irréductibles avec $f(x) \neq \overline{f}(x)$.

Enfin, notons que si $f(x) = \overline{f}(x)$, alors $d_i = d_{9-i}$ pour chaque i. Dans ce cas, on a

$$f(-1) = (d_0 - d_9) + (d_2 - d_7) + (d_4 - d_5) + (d_6 - d_3) + (d_8 - d_1) = 0.$$

Donc, par le théorème des facteurs, $(x+1)$ est un facteur de $f(x)$. Par conséquent, les polynômes restants sont tous réductibles. $\square$

P4. Il y a des siècles, le pirate Capitaine Tableauvert a enterré une grande quantité de trésors dans une seule cellule d'une île structurée en grille de $M \times N$ $(2 \le M, N)$. Vous et votre équipage avez atteint l'île et avez apporté des détecteurs de trésor spéciaux pour trouver la cellule contenant le trésor. Chaque détecteur peut être configuré afin qu'il balaie une sous-grille spécifique $[a, b] \times [c, d]$ avec $1 \le a \le b \le M$ et $1 \le c \le d \le N$. L'utilisation du détecteur vous dira si le trésor se trouve dans la région ou non, mais elle ne pourra pas vous dire à quel endroit de la région le trésor a été détecté. Vous prévoyez d'installer Q détecteurs, qui ne peuvent être utilisés simultanément que lorsque tous les Q détecteurs sont prêts. Quelle est la valeur de Q minimale, en termes de M et N, requise pour garantir que votre équipe puisse déterminer l'emplacement du trésor légendaire du Capitaine Tableauvert ?

Solution 1. Soit $m = \lceil \frac{M}{2} \rceil$ et $n = \lceil \frac{N}{2} \rceil$. On affirme que le minimum Q est $m + n$. Pour la construction, commençons par m détecteurs couvrant $[i, i + m - 1] \times [1, N]$ pour $1 \le i \le m$. Pour chaque paire de rangées, il existe un détecteur qui couvre une rangée mais pas l'autre, ce qui détermine la rangée du trésor. De même, placer n détecteurs couvrant $[1, M] \times [i, i+n-1]$ pour $1 \le i \le n$ détermine la colonne, et donc l'emplacement du trésor.

Pour la borne, on a besoin du lemme suivant.

Lemme. *Une île $1 \times k$ nécessite au moins $\lceil \frac{k}{2} \rceil$ détecteurs.*

Démonstration. Considérons les $k - 1$ lignes séparant les cellules. Si l'une de ces lignes n'est couverte par aucun détecteur, ces cellules sont indiscernables. De même, si aucune des lignes verticales situées aux extrémités n'est couverte, la première et la dernière cellule ne peuvent être distinguées. En particulier, au moins k lignes verticales doivent être couvertes par les détecteurs. Un détecteur couvre 2 lignes verticales, ce qui donne le résultat. □

En général, considérons la première ligne. Puisque les cellules peuvent être distinguées, il doit y avoir au moins n détecteurs qui l'intersectent de manière non triviale (c'est-à-dire qui couvrent entre 1 et $N - 1$ des cellules). Le résultat analogue s'applique à la dernière ligne et aux première et dernière colonnes, ce qui donne $2m + 2n$ détecteurs, un détecteur pouvant être compté plusieurs fois.

Si un détecteur recoupe au moins trois de ces ensembles, on dira qu'il a recoupé la première ligne et les première et dernière colonnes. Il couvre donc toute la largeur de l'île et ne distingue en fait aucune cellule de la première rangée, ce qui est contradictoire.

Par conséquent, chaque détecteur contribue à au plus 2 des $2m + 2n$ détecteurs ci-dessus, ce qui donne la limite inférieure finale de $\frac{2m+2n}{2} = m+n$ détecteurs nécessaires, comme souhaité. □

Solution 2. *L'approche alternative suivante, proposée par le concurrent de l'OCM Marvin Mao de Bergen County Academies, est une autre solution complète.*

Considérons la même construction que dans la Solution 1. Pour la borne, considérons les ensembles suivants :

— $S_{\mathrm{CR}} := \{\{(1,1),(1,N)\},\{(M,1),(M,N)\}\}$, c'est-à-dire les paires de coins sur la même ligne ;

— $S_{\mathrm{CC}} := \{\{(1,1),(M,1)\},\{(1,N),(M,N)\}\}$, c'est-à-dire les paires de coins sur la même colonne ;

— $S_{\mathrm{R}} := \{\{(x,i),(x,i+1)\} : x \in \{1,M\}, 1 \leq i \leq N-1\}$, c'est-à-dire les paires d'arêtes adjacentes sur la première/dernière ligne ;

— $S_{\mathrm{C}} := \{\{(i,x),(i+1,x)\} : 1 \leq i \leq M-1, x \in \{1,N\},\}$, c'est-à-dire les paires d'arêtes adjacentes sur la première/dernière colonne.

Pour chaque détecteur, nous attribuons un résultat $(x_{\mathrm{CR}}, x_{\mathrm{CC}}, x_{\mathrm{R}}, x_{\mathrm{C}})$, où x_{i} est le nombre de paires de cellules dans S_{i} pour lesquelles le détecteur couvre exactement l'une des deux cellules. Les résultats possibles rendus par les détecteurs sont les suivants :

Ce que le détecteur détecte	Résultat
Aucun bord	(0, 0, 0, 0)
Un bord, aucun coin	(0, 0, 2, 0) ou (0, 0, 0, 2)
Deux bords, aucun coin	(0, 0, 4, 0) ou (0, 0, 0, 4)
Un coin	(1, 1, 1, 1)
Deux coins	(2, 0, 2, 0) ou (0, 2, 0, 2)
$>$ 2 coins ou bords	(0, 0, 0, 0)

Afin de déterminer le trésor, la somme totale des composantes des résultats rendus par les détecteurs doit être d'au moins $(2,2,2N-2,2M-2)$, puisqu'on doit distinguer chacune des paires de cellules. La somme de ces composantes est de $2M+2N$, et d'après l'analyse ci-dessus, chaque détecteur ajoute une somme totale de composantes d'au plus 4, ce qui donne au moins $\lceil \frac{2M+2N}{4} \rceil = \lceil \frac{M+N}{2} \rceil$ détecteurs.

Ceci est égal à $\lceil \frac{M}{2} \rceil + \lceil \frac{N}{2} \rceil$ sauf si M et N sont tous deux impairs. Dans ce cas, s'il y a au moins un détecteur supplémentaire, alors nous avons la borne requise. Supposons donc le contraire. En particulier, nous devons atteindre *exactement* le résultat $(2,2,2N-2,2M-2)$, avec chaque détecteur contribuant pour 4 à la somme totale des composantes.

En particulier, pour remplir les deux premières composantes, on doit avoir soit deux détecteurs ayant un résultats de $(1,1,1,1)$, soit deux détecteurs ayant un résultat de $(2,0,2,0)$ et $(0,2,0,2)$. Cela donne un résultat total de $(2,2,2,2)$, ce qui nous permet d'obtenir exactement $(0,0,2N-4,2M-4)$ du reste. Comme on ne peut pas avoir un résultat non nul dans les deux premières entrées et comme la somme totale des composantes doit être de 4, on ne peut utiliser que des détecteurs ayant un résultat de $(0, 0, 4, 0)$ ou de $(0, 0, 0, 4)$. Mais $2N - 4, 2M - 4 \equiv 2 \pmod 4$, ce qui constitue une contradiction.

Par conséquent, toutes les situations nécessitent au moins $\lceil \frac{M}{2} \rceil + \lceil \frac{N}{2} \rceil$ détecteurs. $\square$

P5. Initialement, trois points non colinéaires, A, B et C, sont inscrits sur le plan. Vous disposez d'un crayon et d'une règle graduée de largeur 1. En les utilisant, vous pouvez effectuer les opérations suivantes :

— Marquer un point arbitraire dans le plan.

— Marquer un point arbitraire sur une ligne déjà tracée.

— Si deux points P_1 et P_2 sont marqués, tracer la droite reliant P_1 et P_2.

— Si deux lignes non parallèles ℓ_1 et ℓ_2 sont tracées, marquer l'intersection de ℓ_1 et ℓ_2.

— Si l'on trace une ligne ℓ, tracer une ligne parallèle à ℓ qui est à une distance de 1 de ℓ (deux lignes de ce type peuvent être tracées).

Montrez qu'il est possible de marquer l'orthocentre de ABC à l'aide de ces opérations.

Solution 1.

Claim 1. *Il est possible de tracer des bissectrices d'angles internes/externes.*

Démonstration. Supposons que A, B et C sont marqués. Pour opération la bissection de $\angle ABC$, traçons la droite parallèle à AB à 1 unité du côté opposé à C et traçons la droite parallèle à BC à 1 unité du côté opposé à A. Soit D le point d'intersection de ces droites. Alors BD est la bissectrice interne de $\angle ABC$. On peut construire des bissectrices d'angle externes de la même manière en traçant la droite du même côté que A pour la deuxième droite.

□

Corollary 2. *Il est possible de marquer les centres des cercles inscrits et exinscrits au triangle ABC.*

Démonstration. Traçons les bissectrices internes/externes des trois angles et poursuivont jusqu'à ce qu'elles se coupent. □

Claim 3. *Il est possible de marquer le point médian d'un segment quelconque AB.*

Démonstration. Soient B et C des points marqués. Traçons un point arbitraire A qui n'est pas sur la droite BC. Traçons une droite parallèle à BC à une distance de 1 du côté opposé à A. Soient D et E les points d'intersections de cette droite avec AB et AC respectivement. Soit F le point d'intersection de BE et CD et soit M le point d'intersection de AF et BC. Alors, par le théorème de Ceva, M est le point milieu de BC. □

Corollary 4. *Il est possible de marquer le centre de masse de ABC.*

Démonstration. Traçons le point médian D de BC et le point médian E de AC et intersectons AD avec BE. □

Claim 5. *Il est possible de tracer la médiatrice d'un segment quelconque BC.*

Démonstration. Supposons que B et C sont marqués. Traçons un point arbitraire A qui n'est pas sur la droite BC. Construisons I le centre du cercle inscrit à ABC et I_A le A-centre du cercle exinscrit à ABC. Traçons M le point milieu de BC et N le point milieu de II_A. Par le lemme des centres des cercles inscrits et exinscrits, N est le point milieu de l'arc $\overparen{BC}$ ne contenant pas A. Ainsi, MN est la médiatrice de BC. □

Corollary 6. *Il est possible de marquer le centre du cercle circonscrit à ABC.*

Démonstration. Traçons les médiatrices de BC et AC jusqu'à ce qu'elles se coupent. □

Claim 7. *Étant donné deux points marqués A et B, il est possible de marquer le point C de façon à ce que $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.*

Démonstration. Traçons un point arbitraire D qui n'est pas sur la droite AB. Traçons M le point médian de AD. Traçons M_1 le point milieu de BD et M_2 le point milieu de MD. Soit C le point d'intersection de M_1M_2 et AB. Alors $M_1M_2 \parallel BM$ et $MM_2 = \frac{1}{2}MD = \frac{1}{2}AM$, de sorte que $BC = \frac{1}{2}AB$. □

Claim 8. *Étant donné deux points marqués A et B et tout nombre réel positif k tel que $2k \in \mathbb{Z}$, il est possible de marquer le point C de façon à ce que $\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{AB}$.*

Démonstration. Notons qu'en appliquant l'affirmation 7 et en marquant le point central de AB, nous pouvons faire opérer une translation de $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ à A et B. L'affirmation découle d'une application répétée de cette opération. □

Pour terminer, prenons le triangle ABC et marquons le centre de son cercle circonscrit O et son centre de masse G. Notons que son orthocentre H satisfait à la condition $\overrightarrow{GH} = 2\overrightarrow{OG}$, donc l'application de l'affirmation 8 à $k = 2$ achève la résolution du problème. □

Solution 2. *Ming Yang, de Brophy College Preparatory, a soumis la solution courte et élégante suivante, qui génère également des outils capables d'aller au-delà du problème. Cette solution a été désignée par l'OCM comme la meilleure solution pour 2024 et vaut à Ming Yang le prix Matthew Brennan de cette année.*

On commence par les affirmations 1 à 3 de la solution 1, qui nous permettent de tracer les bissectrices d'angles internes/externes, les centres des cercles inscrit et exinscrit et les points médians. On ajoute une affirmation supplémentaire.

Claim 9. *Etant donné un point P et une droite ℓ_1, il est possible de tracer une droite passant par P et parallèle à ℓ_1.*

Démonstration. Traçons la ligne ℓ_2 du côté opposé de ℓ_1 à P, à une distance de 1. Traçons les droites arbitraires PAB et PCD avec $A, C \in \ell_1$ et $B, D \in \ell_2$. Soit E le point milieu de AC, soit $F = PE \cap \ell_2$ et soit $Q = BE \cap FC$.

Comme $\triangle QEC \sim \triangle QBF$ et $\triangle PAE \sim \triangle PBF$, on a

$$\frac{QE}{QB} = \frac{EC}{BF} = \frac{AE}{BF} = \frac{PA}{PB},$$

de sorte que $\triangle BAE \sim \triangle BPQ$. En particulier, PQ est parallèle à AE, comme voulu. □

Dans le triangle $\triangle ABC$, notons I le centre du cercle inscrit I et I_A le $A-$centre du cercle exinscrit. Notons D le point milieu de BC et M le point milieu de II_A. Par le lemme des centres des cercles inscrits et exinscrits, M est sur la médiatrice de BC. Ainsi MD est perpendiculaire à BC. Enfin, en utilisant l'affirmation 9, on peut tracer une droite passant par A qui est perpendiculaire à BC. On répète ceci pour B et AC et leur intersection est l'orthocentre du $\triangle ABC$, comme demandé. □