Olympiade mathématique junior du Canada

Solutions officielles – OMJC 2024

J1. Il y a des siècles, le pirate Capitaine Tableauvert a enterré une grande quantité de trésors dans une seule cellule d'une île structurée en grille de 2×4. Vous et votre équipage avez atteint l'île et avez apporté des détecteurs de trésor spéciaux pour trouver la cellule contenant le trésor. Chaque détecteur peut être configuré afin qu'il balaie une sous-grille spécifique $[a, b] \times [c, d]$ avec $1 \leq a \leq b \leq 2$ et $1 \leq c \leq d \leq 4$. L'utilisation du détecteur vous dira si le trésor se trouve dans la région ou non, mais elle ne pourra pas vous dire à quel endroit de la région le trésor a été détecté. Vous prévoyez d'installer Q détecteurs, qui ne peuvent être utilisés simultanément que lorsque tous les Q détecteurs sont prêts. Quel est la valeur de Q minimale requise pour garantir que votre équipe puisse déterminer l'emplacement du trésor légendaire du Capitaine Tableauvert ?

Solution. Nous montrerons que $Q = 3$.

Observons d'abord que $Q \leq 3$, c'est-à-dire qu'il est possible d'accomplir la tâche avec trois détecteurs sur la grille ayant 2 lignes et 4 colonnes, comme suit. Le premier détecteur balaie les quatre cellules de la première ligne ; un deuxième détecteur balaie les quatre cellules des deux premières colonnes ; et le troisième détecteur balaie les quatre cellules des deuxième et troisième colonnes.

Le diagramme suivant montre quels détecteurs couvrent chaque cellule :

12	123	1 3	1
2	23	3	

Notons qu'il n'y a pas deux cellules qui donneraient la même réponse aux trois détecteurs. Par conséquent, ces trois détecteurs suffisent à distinguer les huit emplacements possibles. Cela prouve que $Q \leq 3$.

Pour voir que $Q \geq 3$, remarquons qu'il n'y a que 2×2 réponses possibles à partir de n'importe quel arrangement de deux détecteurs. Ces quatre réponses possibles ne sont pas suffisantes pour distinguer huit emplacements possibles. C'est pourquoi trois détecteurs sont donc nécessaires. $\square$

J2. Soit n un entier positif. Soit

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \min\left(\frac{1}{i}, \frac{1}{j}, \frac{1}{k}\right)$$

et $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$. Déterminez $I_n - H_n$ en fonction de n.

Solution. Fixons un entier positif ℓ avec $1 \leq \ell \leq n$. Alors $\min\left(\frac{1}{i}, \frac{1}{j}, \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{\ell}$ précisément lorsque l'un parmi $i, j, k = \ell$ et les autres sont au plus ℓ. Par inclusion-exclusion, le nombre de (i, j, k) qui vérifie cela est $3\ell^2 - 3\ell + 1$. Par conséquent

$$I_n = \sum_{\ell=1}^{n} (3\ell^2 - 3\ell + 1) \cdot \frac{1}{\ell} = \sum_{\ell=1}^{n} 3\ell - \sum_{\ell=1}^{n} 3 + \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\ell} = 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 3n + H_n$$

d'où

$$I_n - H_n = \frac{3n(n+1)}{2} - 3n = \frac{3n(n-1)}{2}.$$

□

J3. Soit ABC un triangle dont le centre du cercle inscrit est I. Supposons que la réflexion de AB sur CI et la réflexion de AC sur BI se coupent en un point X. Montrez que XI est perpendiculaire à BC.

(Le centre du cercle inscrit est le point où les trois bissectrices se rencontrent).

Solution. Supposons que la réflexion de AC sur BI coupe BC en un point E. Définissons F de la même façon pour la réflexion de AB sur CI. Supposons aussi que CI coupe AB en un point M et que BI coupe AC en un point N. Puisque CA et $CF = BC$ sont des réflexions sur CI, de même que MA et $MF = XM$, on a que A et F sont des réflexions sur CI. De même A et E sont des réflexions sur BI. Ainsi $\angle XFC = \angle BAC = \angle XEB$ si $\angle BAC$ est aigu (et $\angle XFC = \angle XEB = \pi - \angle BAC$ lorsque $\angle BAC$ est obtus), donc $XF = XE$. De plus, on trouve aussi que $IF = IA = IE$ par les propriétés de réflexion susmentionnées, donc XI est la médiatrice de EF et est donc perpendiculaire à BC. $\square$

J4. Jeanne écrit 2024 nombres naturels le long d'un cercle. Elle veut que les 2024 produits de paires de nombres adjacents soient exactement l'ensemble $\{1!, 2!, \ldots, 2024!\}$. Peut-elle y parvenir ?

Solution 1. Etant donné un nombre premier p et un entier positif x, notons $v_p(x)$ la plus grande puissance de p divisant x. On affirme que Jeanne ne peut pas écrire 2024 tels nombres car cela impliquerait que $1! \cdot 2! \cdot 2024!$ est le carré du produit des 2024 nombres. Soit p un nombre premier et k un entier naturel tel que $k < p$, $kp \leq 2024$ et $(k+1)p > 2024$. On note alors que

$$v_p(1! \cdot 2! \cdots 2024!) = (2024 - p + 1) + (2024 - 2p + 1) + \ldots + (2024 - kp + 1).$$

En particulier, soit p dans $(\frac{2024}{4}, \frac{2024}{2})$. Par le postulat de Bertrand, un tel nombre premier p existe (et p doit aussi être impair). De plus, le k correspondant est soit 2, soit 3. Quoi qu'il en soit, $v_p(1! \cdot 2! \cdots 2024!)$ est impair d'après la formule ci-dessus. Ainsi $1! \cdot 2! \cdot 2024!$ ne peut pas être un carré parfait. $\square$

Solution 2. Comme pour la première solution, on prouve que $1! \cdot 2! \cdots 2024!$ n'est pas un carré parfait. Pour ce faire, notons qu'on peut réécrire le produit comme $(1!)^2 \cdot 2 \cdot (3!)^2 \cdot 4 \cdots (2023!)^2 \cdot 2024$ et de là on tire

$$2 \cdot 4 \cdots 2024 \cdot (1! \cdot 3! \cdots 2023!)^2 = 1012! \cdot (2^{1012} \cdot 1! \cdot 3! \cdots 2023!)^2.$$

Il suffit donc de vérifier que $1012!$ n'est pas un carré parfait. Cela peut être vérifié soit en remarquant que le nombre premier 1009 n'apparaît qu'une seule fois comme facteur de $1012!$, soit en évaluant $v_2(1012!) = 1005$. $\square$

J5 : Soit N le nombre d'entiers positifs à 10 chiffres $\overline{d_9d_8\ldots d_1d_0}$ en base 10 (où $0 \le d_i \le 9$ pour tous i et $d_9 > 0$) tels que le polynôme

$$d_9x^9 + d_8x^8 + \cdots + d_1x + d_0$$

est irréductible dans $\mathbb{Q}$. Montrez que N est pair.

(Un polynôme est irréductible dans $\mathbb{Q}$ s'il ne peut être factorisé en deux polynômes non constants à coefficients rationnels).

Solution. Soit $f(x) = d_9x^9 + d_8x^8 + \cdots + d_1x + d_0$. Si $d_0 = 0$, alors $f(x)$ est divisible par x et donc réductible ; on peut donc ignorer tous ces polynômes. Les polynômes restants ont tous des coefficients premiers et constants non nuls.

Pour tout polynôme $p(x)$ de degré n à coefficients directeur et constant non nuls, disons $p(x) = a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, définisson $\overline{p}(x)$ comme étant le polynôme inversé $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$. $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$. Observons que $\overline{p}(x)$ est également de degré n et que, de plus, $\overline{p}(x) = x^n\left(a_0 + a_1\left(\frac{1}{x}\right) + \cdots + a_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1} + a_n\left(\frac{1}{x}\right)^n\right) = x^np\left(\frac{1}{x}\right)$.

On considère l'appariement de chaque $f(x)$ avec $\overline{f}(x)$ chaque fois que $f(x) \neq \overline{f}(x)$. Si $f(x)$ est réductible, il peut être factorisé sous la forme $f(x) = g(x)h(x)$, où $\deg g, \deg h \ge 1$. Comme les coefficients directeur et constant de $f(x)$ sont non nuls, les coefficients directeurs et constants de $g(x)$ et $h(x)$ le sont aussi. Par conséquent, $\overline{g}(x)$ et $\overline{h}(x)$ sont bien définis avec $\deg \overline{g} = \deg g \ge 1$ et $\deg \overline{h} = \deg h \ge 1$. En outre,

$$\overline{f}(x) = x^9f\left(\frac{1}{x}\right) = x^9g\left(\frac{1}{x}\right)h\left(\frac{1}{x}\right) = \left(x^{\deg g}g\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(x^{\deg h}h\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \overline{g}(x)\overline{h}(x).$$

Ainsi, $\overline{f}(x) = \overline{g}(x)\overline{h}(x)$ est une factorisation de $\overline{f}(x)$ en deux polynômes non constants, donc $\overline{f}(x)$ est également réductible. Par conséquent, $f(x)$ est irréductible si et seulement si $\overline{f}(x)$ est irréductible. Donc, en considérant chaque paire, il y a un nombre pair de polynômes irréductibles avec $f(x) \neq \overline{f}(x)$.

Enfin, notons que si $f(x) = \overline{f}(x)$, alors $d_i = d_{9-i}$ pour chaque i. Dans ce cas, on a

$$f(-1) = (d_0 - d_9) + (d_2 - d_7) + (d_4 - d_5) + (d_6 - d_3) + (d_8 - d_1) = 0.$$

Donc, par le théorème des facteurs, $(x + 1)$ est un facteur de $f(x)$. Par conséquent, les polynômes restants sont tous réductibles. $\square$