1. Montrez que pour tout entier $a \geq 1$, $\lfloor \sqrt{a} + \sqrt{a+1} + \sqrt{a+2} \rfloor = \lfloor \sqrt{9a+8} \rfloor$.

Solution. Nous démontrerons la chaîne d'inégalités suivante :

$$\sqrt{9a+8} < \sqrt{a} + \sqrt{a+1} + \sqrt{a+2} < \sqrt{9a+9}.$$

Notons que

$$\begin{aligned}
(\sqrt{a} + \sqrt{a+2})^2 &= a + a + 2 + 2\sqrt{a^2+2a} \\
&< 2a + 2 + 2\sqrt{a^2+2a+1} \\
&= 4a + 4 \\
&= (2\sqrt{a+1})^2.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\sqrt{a} + \sqrt{a+2} < 2\sqrt{a+1},$$

de sorte que

$$\sqrt{a} + \sqrt{a+1} + \sqrt{a+2} < 3\sqrt{a+1} = \sqrt{9a+9}.$$

En vertu de l'inégalité arithmético-géométrique,

$$\begin{aligned}
& \sqrt{a} + \sqrt{a+1} + \sqrt{a+2} \\
\geq\ & 3\sqrt[6]{a(a+1)(a+2)} \\
=\ & \sqrt{\sqrt[3]{729(a^3+3a^2+2a)}} \\
=\ & \sqrt{\sqrt[3]{729a^3+2187a^2+1458a)}} \\
=\ & \sqrt{\sqrt[3]{729a^3+1944a^2+1728a+512+(243a^2-270a-512)}} \\
=\ & \sqrt{\sqrt[3]{(9a+8)^3+(243a^2-270a-512)}} \\
>\ & \sqrt{\sqrt[3]{(9a+8)^3}} \text{ lorsque } a \geq 3 \\
=\ & \sqrt{9a+8}
\end{aligned}$$

De plus, pour $a = 1, 2$, selon une approche numérique, on vérifie aisément que

$$\sqrt{9a+8} < \sqrt{a} + \sqrt{a+1} + \sqrt{a+2}$$

Nous avons montré, en somme, que pour tout entier positif on a

$$\sqrt{9a+8} < \sqrt{a} + \sqrt{a+1} + \sqrt{a+2} < \sqrt{9a+9}.$$

Une application de la fonction partie entière à l'inégalité ci-dessus nous donne

$\lfloor\sqrt{9a+8}\rfloor \leq \lfloor\sqrt{a} + \sqrt{a+1} + \sqrt{a+2}\rfloor \leq \lfloor\sqrt{9a+9}\rfloor$.

Notons que $\sqrt{9a+8}$ et $\sqrt{9a+9}$ sont les racines carrées d'entiers consécutifs. Ainsi, les parties entières de ces deux termes ne diffèrent que lorsque $9a+9$ est un carré parfait.

Lorsque $9a+9$ n'est pas un carré parfait, les termes extrémaux de cette inégalités coïncident, ce qui implique que le terme du centre coïncide lui aussi avec les termes extrémaux. Lorsque $9a+9$ est un carré parfait, on a $\sqrt{a} + \sqrt{a+1} + \sqrt{a+2} < \sqrt{9a+9}$ et il s'ensuit que l'inégalité de gauche doit impérativement être une égalité. Autrement dit $\lfloor\sqrt{a} + \sqrt{a+1} + \sqrt{a+2}\rfloor = \lfloor\sqrt{9a+8}\rfloor$.

2. Étant donné un ensemble d'entiers S, une *partition optimale de S* en sous-ensembles T, U est une partition minimisant la valeur $|t-u|$, où t et u représentent la somme des éléments de T et U respectivement.

   Soit P un ensemble d'entiers positifs jouissant des deux propriétés suivantes : d'abord la somme des éléments de P est $2k$, où k désigne un entier positif; puis il n'existe aucun sous-ensemble de P dont la somme des éléments est k.

   Montrez l'une ou l'autre des affirmation suivantes : il existe un tel ensemble P admettant au moins 2020 partitions optimales distinctes; il n'existe pas de tel ensemble P.

   Solution. Considérons l'ensemble

   $$P = \{1, 3\} \cup \{10, 20, 30\} \cup \{100, 200, 300\} \cup \cdots \cup \{10^{11}, 2 \cdot 10^{11}, 3 \cdot 10^{11}\}.$$

   Nous soutenons que P jouit des propriétés souhaitées. La somme des éléments de P est $666666666664 = 2k$, où $k = 333333333332$. Notons que k est 2 de plus qu'un multiple de 10. Puisque les seuls éléments de P qui ne sont pas des multiples de 10 sont 1 et 3, il est impossible que la somme des éléments d'un sous-ensemble de P soit k.

La somme des éléments de $T = \{3, 30, 300, \ldots, 3 \cdot 10^{11}\}$ est $k+1$ ce qui signifie que T et $P - T$ forment une partition optimale. Pour tout $3 \cdot 10^k, k \geq 1$ dans T, on pourrait plutôt prendre 10^k et $2 \cdot 10^k$ et ainsi obtenir une autre partition optimale. Puisqu'il y a 11 valeurs de k pour lesquelles nous pourrions faire une telle substitution, il y a $2^{11} > 2020$ partitions optimales de P distinctes.

3. Soient N un entier positif et $A = a_1, a_2, \ldots, a_N$ une famille de nombres réels. Définissons $f(A)$ comme étant la famille que voici

$$f(A) = \left(\frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_2 + a_3}{2}, \cdots, \frac{a_{N-1} + a_N}{2}, \frac{a_N + a_1}{2}\right).$$

Étant donné un entier positif k, le terme $f^k(A)$ signifie que l'on fait subir à la famille A exactement k itérations de f (c.-à-d. $f(f(\cdots f(A))))$

Trouvez toutes les familles d'entiers $A = (a_1, a_2, \ldots, a_N)$ pour lesquelles $f^k(A)$ contient seulement des entiers, et ce pour tous les k.

Solution. Soit $M(A) = (a_1 + a_2 + \cdots a_N)/N$ et soit

$$S(A) = |M(A) - a_1| + |M(A) - a_2| + \cdots + |M(A) - a_N|.$$

Alors

$$\begin{array}{rcl} S(A) & = & (\frac{1}{2}|M(A) - a_1| + \frac{1}{2}|M(A) - a_2|) + (\frac{1}{2}|M(A) - a_2| + \frac{1}{2}|M(A) - a_3|) + \cdots \\ & \geq & \frac{1}{2}|M(A) - \frac{a_1 + a_2}{2}| + \frac{1}{2}|M(A) - \frac{a_2 + a_3}{2}| + \cdots \\ & = & S(f(A)) \end{array}$$

Notons qu'il y a égalité seulement lorsque A est une famille constante.

Si $f^k(A)$ est constitué de valeurs entières, et ce pour tous les k, alors $N \cdot S(A)$ doit toujours être un entier. Puisqu'il s'agit d'une valeur entière positive et non croissante, cette valeur doit finir par se stabiliser et, conséquemment, la famille A doit tôt ou tard se stabiliser. Si A est une famille constante, alors $f^{-1}(A)$ est soit égale à A, ou il s'agit d'une famille de la forme $x, y, x, y, \ldots$, où N est pair et x, y sont de même parité. Lorsque $x \neq y$, il n'existe pas de famille $f^{-1}(x, y, x, y, \cdots)$.

Ainsi A doit impérativement être une famille constante d'entiers ou une famille de la forme $x, y, x, y, \ldots, y$.

4. Déterminez tous les graphes G vérifiant les deux propriétés suivantes :

   - G admet au moins un chemin hamiltonien.
   - Pour toute paire de sommets, $u, v \in G$, s'il existe un chemin hamiltonien de u vers v alors l'arête uv appartient au graphe G.

   Solution. Soit G un graphe vérifiant les deux propriétés submentionnées et soit $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ un chemin hamiltonien. Alors l'arête v_1v_n doit aussi appartenir à G. Si $n = 2$ alors G est un graphe constitué d'une unique arête. Si $n \geq 3$ alors $(v_1, v_2, \ldots v_n)$ est un cycle hamiltonien. Si G ne contient aucune autre arête, alors il satisfait les propriété submentionnées. Cela implique que tous les graphes cycliques jouissent des propriétés voulues.

   Si G possède d'autres arêtes que celles composant le cycle, alors une arête de v_i vers v_j dans G sera appelée *corde de longueur* $j - i$, où $j - i$ est calculé modulo n. Montrons les deux lemmes suivants :

   - Si G contient une corde de longueur k, alors G contient toutes les cordes de longueur k.
   - Si G contient une corde de longueur $2 \leq k \leq n-2$ alors G contient une corde de longueur $k + 2m$ pour un certain entier m.

   Supposons que G contient une corde de longueur k et que l'arête v_1v_{k+1} appartient à G. Alors le chemin $v_2, v_3, \ldots, v_k, v_{k+1}, v_1, v_n, v_{n-1}, \ldots, v_{k+2}$ est un chemin hamiltonien et il s'ensuit que l'arête v_2v_{k+2} appartient au graphe. La démonstration du premier lemme découle d'une application répétée de cette idée.

   Considérons le chemin $(v_1, v_{k+1}, v_{k+2}, v_2, v_3, \ldots, v_kv_n, v_{n-1}, \ldots, v_{k+3})$. Il découle du premier lemme que, puisque toutes ces arêtes appartiennent à G il s'agit d'un chemin hamiltonien. Cela montre que v_1v_{k+3} appartient au graphe. Une construction similaire permet de montrer que l'arête v_1v_{k-1} appartient également au graphe. En procédant ce la sorte et en faisant usage du premier lemme, on achève la démonstration du second lemme.

   Si n est impair, toute arête v_iv_j engendre une corde de longueur $j-i$ et $i - j$. L'un de ces nombres étant impair et l'autre étant pair (modulo n), on en déduit que G doit être un graphe complet.

Si n est pair mais que k est impair, alors c'est qu'on est en présence d'un graphe biparti. Si G possède une autre arête, alors cette corde doit être paire. Il s'ensuit alors que toutes les cordes de G sont paires et on déduit que G doit être un graphe complet.

Si n et k sont tous deux pairs, alors l'arête v_1v_3 appartient à G. Si $n = 4$ alors il s'agit d'un graphe biparti. Si $n > 4$, alors on a que $v_2, v_1, v_3, v_4, \ldots, v_n$ est également un chemin hamiltonien de G. Sur ce chemin, v_2v_4 est une corde de longueur 3 et v_3v_5 est une corde de longueur 2. Toutes deux appartiennent à G et on en déduit que G doit être un graphe complet.

En somme, les graphes vérifiant les propriétés submentionnées sont les graphes cycliques, les graphes biparti complets et les graphes complets.

5. Considérons les suites que voici :

   - La suite A est définie par $a_n = n$.
   - La suite B est définie par $b_n = a_n$ lorsque $a_n \not\equiv 0 \pmod 3$ et par $b_n = 0$ sinon.
   - La suite C est définie par $c_n = \sum_{i=1}^{n} b_i$.
   - La suite D est définie par $d_n = c_n$ lorsque $c_n \not\equiv 0 \pmod 3$ et par $d_n = 0$ sinon.
   - La suite E est définie par $e_n = \sum_{i=1}^{n} d_i$.

   Montrez que les termes de la suite E sont précisément les cubes parfaits.

   Solution.

   Notons que la suite $\{b_n\}$ est définie par :

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \equiv (0 \mod 3) \\ n & \text{sinon.} \end{cases}$$

   En considérant n modulo 3, on peut calculer c_n comme suit :

$$c_n = \begin{cases} 3k^2 + 3k + 1 = 3k(k+1) + 1 & \text{si } n = 3k + 1 \\ 3(k+1)^2 & \text{si } n = 3k + 2 \\ 3k^2 & \text{si } n = 3k. \end{cases}$$

Afin de déterminer $\{d_n\}$, on remplace tous les multiples de 3 par des zéros. Cela se produit lorsque $n = 3k$ ou $n = 3k+1$, de sorte que $\{d_n\}$ est de la forme

$$1, 0, 0, 7, 0, 0, 19, 0, 0, 37, 0, ...,$$

et e_n est de la forme

$$1, 1, 1, 8, 8, 8, 27, 27, 27, 64, 64, ...$$

Observant que e_n croît à chaque indice $n = 3k+1$, on redéfinit n comme alternant entre $3k+1$, $3k+2$, $3k+3$ pour les valeurs de k, de sorte que pour $n = 3k+i$, $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, et $i = \{1, 2, 3\}$

$$\begin{aligned}
e_n &= \sum_{r=0}^{k}(3r^2 + 3r + 1) \\
&= 3\sum_{r=1}^{k} r^2 + 3\sum_{r=1}^{k} r + \sum_{r=0}^{k} 1 \\
&= 3\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + 3\frac{k(k+1)}{2} + k + 1 \\
&= \frac{2k^3 + 3k^2 + k}{2} + \frac{3k^2 + 3k}{2} + k + 1 \\
&= \frac{2k^3 + 6k^2 + 4k}{2} + k + 1 \\
&= k^3 + 3k^2 + 2k + k + 1 \\
&= (k+1)^3
\end{aligned}$$

6. Soit $ABCDE$ un pentagone convexe dans lequel AC est parallèle à DE, AB est perpendiculaire à AE et BC est perpendiculaire à CD. Soient H l'orthocentre du triangle ABC et M le point milieu du segment DE. Montrez que les segments AD, CE et HM sont concourants.

   Solution. Soit P le point d'intersection des droites AE et CD, et soit Q le point milieu du segment AC. Comme H est l'orthocentre du triangle ABC, il s'ensuit que $AH \| CD$ et $CH \| AE$. Cela implique que $AHCP$ forme un parallélogramme et, par voie de conséquence,

PH passe par le point milieu Q de AC. Comme $DE \| AC$, il s'ensuit que le triangle PED est similaire au triangle PAC. Cela implique que $\angle PEM = \angle PED = \angle PAC = \angle PAQ$ et que

$$\frac{AQ}{AP} = \frac{AC}{2 \cdot AP} = \frac{ED}{2 \cdot EP} = \frac{EM}{EP}.$$

Ainsi, les triangles PAQ et PEM sont similaires et $\angle EPM = \angle APQ$. Par conséquent le point M est situé sur la droite passant par P, Q et H et il suffit de montrer que les segments PH, CE et AD sont concourants. Comme $DE \| AC$, $AH \| CD$ et $CH \| AE$, on a que les triangles PED et HCA sont similaires et que leurs côtés correspondants sont parallèles. Ainsi

$$\frac{CH}{EP} = \frac{AH}{DP}.$$

Désignons par X et Y les intersections de CE et AD avec HP, respectivement. Comme $CH \| EP$ et $AH \| DP$, on a que les triangles EXP et CXH sont similaires et que les triangles PYD et HYA sont similaires. En considérant leurs rapports de proportionalité, on obtient que

$$\frac{HX}{XP} = \frac{CH}{EP} = \frac{AH}{DP} = \frac{HY}{YP}.$$

Puisque les points X et Y sont tous deux sur le segment HP, il s'ensuit que $X = Y$. Ainsi, CE, AD et HP sont concourants en X, comme voulu. Cela implique que AD, CE et HM sont concourants.

7. Soient a, b, c des nombres réels positifs vérifiant $ab + bc + ac = abc$. Montrez que

$$\frac{bc}{a^{a+1}} + \frac{ac}{b^{b+1}} + \frac{ab}{c^{c+1}} \geq \frac{1}{3}.$$

Solution 1. Puisque l'inégalité à montrer est symétrique par rapport à a, b, c, on peut supposer sans perte de généralité que $a \geq b \geq c$. De plus, $0 < ab + ac = (a-1)bc$ implique que $a > 1$ et, par un argument similaire, on déduit que $b > 1$ et $c > 1$. En combinant ces résultats, on obtient que $ab \geq ac \geq bc$ et $a^{a+1} \geq b^{b+1} \geq c^{c+1}$. Par une application de l'inégalité de Tchebychev et par l'inégalité ci-dessus, on a que

$$\begin{aligned} \frac{bc}{a^{a+1}} + \frac{ac}{b^{b+1}} + \frac{ab}{c^{c+1}} &\geq \frac{1}{3}(bc + ac + ab)\left(\frac{1}{a^{a+1}} + \frac{1}{b^{b+1}} + \frac{1}{c^{c+1}}\right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot abc\left(\frac{1}{a} \cdot a^{-a} + \frac{1}{b} \cdot b^{-b} + \frac{1}{c} \cdot c^{-c}\right). \end{aligned}$$

En réarrangeant cette condition, on obtient que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$. Or, par l'inégalité arithmético-géométrique pondérée de pondérations $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ et $\frac{1}{c}$, on a

$$\frac{1}{a}\cdot a^{-a}+\frac{1}{b}\cdot b^{-b}+\frac{1}{c}\cdot c^{-c}\geq (a^{-a})^{\frac{1}{a}}(b^{-b})^{\frac{1}{b}}(c^{-c})^{\frac{1}{c}}=\frac{1}{abc}.$$

Il suffit ensuite d'appliquer ce résultat à l'inégalité obtenue ci-dessus pour achever la démonstration.

Solution 2. En réarrangeant cette condition, on obtient $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$. Or, par l'inégalité arithmético-géométrique pondérée de pondérations $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ et $\frac{1}{c}$, on a

$$\begin{aligned}\frac{bc}{a^{a+1}}+\frac{ac}{b^{b+1}}+\frac{ab}{c^{c+1}} &= abc\left(\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a^{a+1}}+\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{b^{b+1}}+\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{c^{c+1}}\right)\\ &\geq abc\left(\frac{1}{a^{a+1}}\right)^{\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{b^{b+1}}\right)^{\frac{1}{b}}\left(\frac{1}{c^{c+1}}\right)^{\frac{1}{c}}\\ &= \frac{1}{a^{\frac{1}{a}}b^{\frac{1}{b}}c^{\frac{1}{c}}}.\end{aligned}$$

Il suffit ensuite de montrer que $3\geq a^{\frac{1}{a}}b^{\frac{1}{b}}c^{\frac{1}{c}}$. Comme $\log x$ est une fonction concave, appliquons l'inégalité de Jensen avec les pondérations $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ et $\frac{1}{c}$ afin d'obtenir

$$\frac{1}{a}\cdot\log a+\frac{1}{b}\cdot\log b+\frac{1}{c}\cdot\log c\leq\log\left(\frac{1}{a}\cdot a+\frac{1}{b}\cdot b+\frac{1}{c}\cdot c\right)=\log 3.$$

Le résultat désiré découle alors de ce que $\log x$ est une fonction croissante.

8. Trouvez toutes les paires (a,b) de nombres rationnels positifs pour lesquels $\sqrt[b]{a}=ab$.

Réponse. $(a,b)=\left(\left(\frac{q}{q+1}\right)^{q},\frac{q}{q+1}\right)$ où $q\in\mathbb{N}$; $(a,b)=\left(\left(\frac{q}{q+1}\right)^{q+1},\frac{q+1}{q}\right)$ où $q\in\mathbb{N}$; et $(a,b)=(a,1)$ où $a\in\mathbb{Q}$.

Solution. Soit $b=c/d$ où $c,d\in\mathbb{N}$ et $\mathrm{PGCD}(c,d)=1$. En adoptant cette notation, l'équation peut être reformulée ainsi : $a^d=(ab)^c$. Cela implique que a^d est la c-ième puissance d'un nombre rationnel et, puisque $\mathrm{PGCD}(c,d)=1$, cela implique également qu'il existe un $r\in\mathbb{Q}$ tel que $a=r^c$. En effectuant cette substitution, on obtient $r^{d-c}=c/d$. En posant $|c-d|=n$, on obtient que $r^n=c/d$ ou encore que $r^{-n}=c/d$. Or, comme $\mathrm{PGCD}(c,d)=1$, cela implique dans les deux cas que c et d sont tous deux la n-ième puissance d'un entier positif. En posant $c=p^n$ et $d=q^n$ pour certains $p,q\in\mathbb{N}$, on a que $|p^n-q^n|=n$ et, si $n=0$ et $p=q$, alors le fait que $\mathrm{PGCD}(c,d)=1$ implique que $p=q=1$ et l'on obtient la solution suivante $(a,b)=(a,1)$ où $a\in\mathbb{Q}$. Si $p\neq q$, alors $n=|p^n-q^n|\geq 2^n-1$. Si $n\geq 2$, alors $2^n-1>n$, ce qui constitue une contradiction. En considérant le cas $n=1$, on obtient l'ensemble solution $(a,b)=\left(\left(\frac{q}{q+1}\right)^q,\frac{q}{q+1}\right)$ et $(a,b)=\left(\left(\frac{q}{q+1}\right)^{q+1},\frac{q+1}{q}\right)$ pour tout $q\in\mathbb{N}$.