Finale

Le Défi ouvert canadien de mathématiques 2024

Livret officiel du concours

Veuillez noircir complètement le cercle qui s'applique :

Aurez-vous 19 ans ou moins le 30 juin 2025 ? Ⓞ Ⓝ

Pourquoi nous posons cette question : Le DOCM a une limite d'âge dans le cadre de la participation officielle à l'OIM de l'été prochain.

Avez-vous la citoyenneté canadienne ou la résidence permanente au Canada? Ⓞ Ⓝ

Pourquoi nous posons cette question : parce que nous avons besoin de savoir dans laquelle de nos deux divisions principales vous classer – division canadienne ou division internationale.

Votre courriel : ______________________________

Pourquoi nous posons cette question : parce que si vous obtenez un score suffisamment élevé au DOCM, nous pourrions vous contacter pour vous inviter à des concours de niveau supérieur comme l'Olympiade mathématique du Canada.

NE PAS PHOTOCOPIER LES PAGES DE CE LIVRET

Chaque page a son propre code-barre préenregistré qui correspond à un élève en particulier.

Page à identification unique
– aucune photocopie !

Question A1 (4 points)

Deux sites A et B sont reliés par un sentier de 5 miles qui comporte un belvédère C. Un groupe de 15 randonneurs est parti de A et a marché le long du sentier jusqu'à C. Un autre groupe de 10 randonneurs est parti de B et a marché le long du sentier jusqu'à C. La distance totale parcourue jusqu'à C par tous les randonneurs du groupe parti de A est égale à la distance totale parcourue jusqu'à C par tous les randonneurs du groupe parti de B.

Trouvez la distance (en miles) de A à C le long du sentier.

Votre solution :

Votre réponse finale :
[La bonne réponse recevra la totalité des points]

Question A2 (4 points)

Alice et Bob courent autour d'un bâtiment rectangulaire de 100 mètres par 200 mètres. Ils commencent au milieu d'un côté de 200 mètres et courent dans la même direction, Alice courant deux fois plus vite que Bob.

Après que Bob ait couru un tour du bâtiment, quelle fraction du temps Alice et Bob ont-ils passé sur le même côté du bâtiment ?

Votre solution :

Votre réponse finale :
[La bonne réponse recevra la totalité des points]

Question A3 (4 points)

Colleen a trois chemises (une rouge, une verte et une bleue), trois jupes (une rouge, une verte et une grise), trois écharpes (une rouge, une bleue et une grise), et trois chapeaux (un vert, un bleu et un gris).

De combien de façons peut-elle choisir une chemise, une jupe, une écharpe et un chapeau, de sorte que deux des quatre vêtements soient d'une couleur et que les deux autres soient d'une couleur différente ?

Votre solution :

Votre réponse finale :

[La bonne réponse recevra la totalité des points]

Question A4 (4 points)

Considérons la suite de nombres pairs consécutifs débutant par 0 et disposés en rangées sous forme échelonnée, où chaque rangée contient un nombre de plus que la rangée précédente. Le début de cette suite est illustré ci-dessous :

0				
2	4			
6	$\underline{8}$	10		
12	14	16	18	
20	22	24	26	28

Le nombre au milieu de la troisième rangée est 8. Quel est le nombre au milieu de la 101^{e} rangée ?

Votre réponse finale :

[La bonne réponse recevra la totalité des points]

Page à identification unique
– aucune photocopie !

Question B1 (6 points)

Pour tout nombre entier strictement positif k, la factorielle $k!$ est définie comme étant le produit de tous les entiers compris entre 1 et k inclusivement : $k! = k \times (k-1) \times \cdots \times 1$. Soit $s(n)$ la somme des n premières factorielles, c'est-à-dire

$$s(n) = \underbrace{n \times (n-1) \times ... \times 1}_{n!} + \underbrace{(n-1) \times (n-2) \times ... \times 1}_{(n-1)!} + \cdots + \underbrace{2 \times 1}_{2!} + \underbrace{1}_{1!}$$

Trouvez le reste de la division de $s(2024)$ par 8.

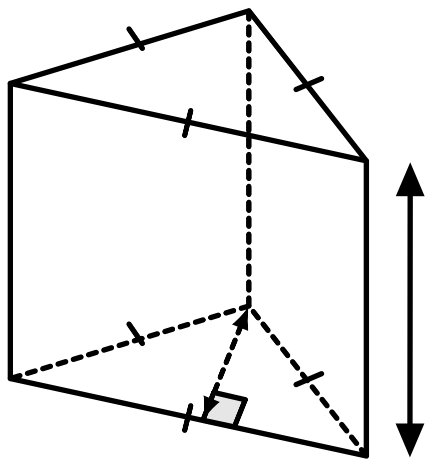
Votre solution :

Votre réponse finale :

[La bonne réponse recevra la totalité des points]

Question B2 (6 points)

David voulait calculer le volume d'un prisme à base triangulaire équilatérale. On lui a donné la hauteur du prisme $H = 15$ et la hauteur de la base $h = 6$. Par accident, il a interverti les valeurs de H et h dans ses calculs. Par quel nombre doit-il multiplier son résultat afin d'obtenir le bon volume ?



Votre solution :

Votre réponse finale :

[La bonne réponse recevra la totalité des points]

Page à identification unique
– aucune photocopie !

Question B3 (6 points)

Soient a, b, c et d quatre entiers **distincts** tels que :

$$\begin{aligned} \min(a,b) &= 2 \\ \min(b,c) &= 0 \\ \max(a,c) &= 2 \\ \max(c,d) &= 4 \end{aligned}$$

Ici, $\min(a,b)$ et $\max(a,b)$ désignent respectivement le minimum et le maximum de deux nombres a et b. Déterminez la cinquième plus petite valeur possible pour $a+b+c+d$.

Votre solution :

Votre réponse finale :

[La bonne réponse recevra la totalité des points]

Question B4 (6 points)

Initialement, l'entier 80 est écrit sur un tableau noir. À chaque étape, l'entier x sur le tableau est remplacé par un entier, choisi uniformément au hasard parmi $[0, x-1]$, sauf si $x = 0$, auquel cas il est remplacé par un entier choisi uniformément au hasard parmi $[0, 2024]$. Soit $P(a, b)$ la probabilité qu'après a étapes, l'entier sur le tableau soit b. Déterminez

$$\lim_{a\to\infty} \frac{P(a, 80)}{P(a, 2024)}$$

(c'est-à-dire la valeur que la fonction $\frac{P(a,80)}{P(a,2024)}$ approche lorsque a tend vers l'infini).

Votre solution :

Votre réponse finale :

[La bonne réponse recevra la totalité des points]

Question C1 (10 points)

Page à identification unique
– **aucune photocopie !**

Considérer la fonction $f(x,y,t) = \frac{x^2-y^2}{2} - \frac{(x-yt)^2}{1-t^2}$ pour toutes les valeurs réelles x, y et $t \neq \pm 1$.

(a) Évaluez $f(2,0,3)$ et $f(0,2,3)$.

(b) Montrez que $f(x,y,0) = f(y,x,0)$ pour toutes les valeurs de (x,y).

(c) Montrez que $f(x,y,t) = f(y,x,t)$ pour toutes les valeurs de (x,y) et $t \neq \pm 1$.

(d) Étant donné

$$g(x,y,s) = \frac{(x^2-y^2)(1+\sin(s))}{2} - \frac{(x-y\sin(s))^2}{1-\sin(s)}$$

pour toutes les valeurs réelles de x, y et $s \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, où k est un nombre entier, montrez que $g(x,y,s) = g(y,x,s)$ pour toutes les valeurs de (x,y) et s dans le domaine de $g(x,y,s)$.

Votre solution :

Vous **devrez** montrer comment vous en êtes arrivé.e au résultat final.

Question C2 (10 points)

(a) Combien y a-t-il de façons d'arranger les éléments de 1, 2, ..., 14 en sept paires de façon à ce que chaque paire ait une somme d'au moins 15 ?

(b) Combien y a-t-il de façons d'arranger les éléments de 1, 2, ..., 14 en sept paires de façon à ce que chaque paire ait une somme d'au moins 13 ?

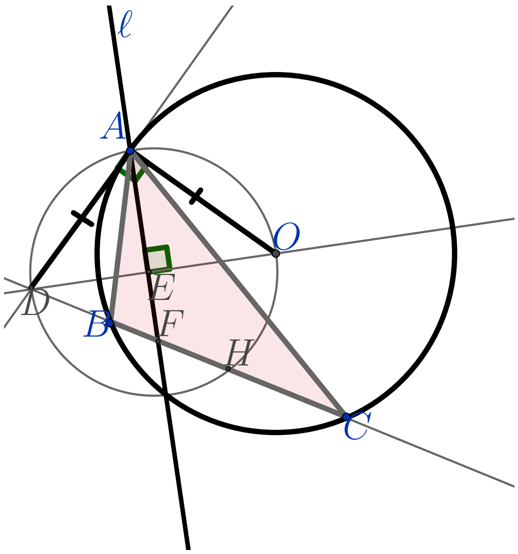
(c) Combien y a-t-il de façons d'arranger les éléments de 1, 2, ..., 2024 en 1012 paires de façon à ce que chaque paire ait une somme d'au moins 2001 ?

Votre solution :

Vous **devrez** montrer comment vous en êtes arrivé.e au résultat final.

Question C3 (10 points)

Soit ABC un triangle tel que la tangente du point A au cercle circonscrit coupe la droite BC au point D, et soit O le centre du cercle circonscrit. Traçons la droite ℓ qui passe par A et qui est perpendiculaire à OD. La droite ℓ rencontre OD au point E et BC au point F. Le cercle passant par ADO coupe à nouveau BC au point H. Il est aussi donné que $AD = AO = 1$.



(a) Trouvez OE.

(b) Supposons pour cette partie seulement que $FH = \frac{1}{\sqrt{12}}$: déterminez l'aire du triangle OEF.

(c) Supposons pour cette partie seulement que $BC = \sqrt{3}$: déterminez l'aire du triangle OEF.

(d) Supposons que B se trouve sur la bissectrice de DEF. Trouvez l'aire du triangle OEF.

Votre solution :

Vous **devrez** montrer comment vous en êtes arrivé.e au résultat final.

Question C4 (10 points)

Un polynôme $f(x)$ est dit *excellent* si ses coefficients sont tous dans $[0, 1)$ et si $f(x)$ est un entier pour tout entier x.

(a) Calculez le nombre de polynômes excellents dont le degré est au plus égal à 3.

(b) Calculez, en fonction de n, le nombre de polynômes excellents dont le degré est au plus égal à n.

(c) Trouvez le plus petit entier $n \geq 3$ pour lequel il existe un polynôme excellent de la forme $\frac{1}{n!}x^n + g(x)$, où $g(x)$ est un polynôme de degré au plus $n - 3$.

Votre solution :

Vous **devrez** montrer comment vous en êtes arrivé.e au résultat final.

Commanditaires

Jane Street

intact

The Actuarial Foundation of Canada / La Fondation actuarielle du Canada

BC Hydro

crowdmark

Nova Scotia / Nouvelle-Écosse

Manitoba

New Brunswick / Nouveau Brunswick

Ontario

Yukon Canada

Honda Canada Foundation

Maplesoft Mathematics • Modeling • Simulation

The McLean Foundation

S. M. Blair Family Foundation

Samuel Beatty Fund University of Toronto

Partenaires académiques

Brock University
Carleton University
Concordia University
Dalhousie University
MacEwan University
Memorial University
University of Alberta
University of British Columbia
University of Calgary
University of Manitoba
l'Université de Montréal
l'Université du Nouveau-Brunswick
l'Université d'Ottawa
University of Prince Edward Island
University of Regina
University of Saskatchewan
University of Toronto
University of Windsor
Western University
York University