Canadian Mathematical Society
Société mathématique du Canada

P1. Les n joueurs d'une équipe de hockey se réunissent pour choisir leur capitaine. Au départ, ils se placent en cercle et chacun vote pour la personne qui se trouve à sa gauche.

Les joueurs mettront à jour leurs votes au cours d'une série de tours. Lors d'un tour, un joueur a met à jour son vote, un à la fois, selon la procédure suivante : Si, au moment de cette mise à jour, a vote pour b, et b vote pour c, alors a met à jour son vote en faveur de c. (Notez que a, b et c ne sont pas nécessairement distincts ; si $b = c$, alors le vote de a ne change pas lors de cette mise à jour). Chaque joueur met à jour son vote exactement une fois à chaque tour, dans un ordre déterminé par les joueurs (qui peut être différent d'un tour à l'autre).

Ils répètent cette procédure de mise à jour pendant n tours. Montrez qu'à ce moment, les n joueurs voteront unanimement pour la même personne.

P2. Déterminez tous les entiers strictement positifs a, b, c, p tels que p et $p + 2$ sont des nombres premiers impairs et

$$2^a p^b = (p + 2)^c - 1.$$

P3. Un polynôme $c_d x^d + c_{d-1} x^{d-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ de degré d est appelé *réflexif* s'il existe un entier $n \geq d$ tel que $c_i = c_{n-i}$ pour tout $0 \leq i \leq n$, où $c_i = 0$ pour $i > d$. Soit $\ell \geq 2$ un entier et $p(x)$ un polynôme à coefficients entiers. Montrez qu'il existe des polynômes réflexifs $q(x), r(x)$ à coefficients entiers tels que

$$(1 + x + x^2 + \cdots + x^{\ell-1})p(x) = q(x) + x^\ell r(x).$$

P4. Soit ABC un triangle dont le cercle circonscrit est Γ et $AB \neq AC$. Soient D et E des points situés sur l'arc BC de Γ qui ne contient pas A de sorte que $\angle BAE = \angle DAC$. Soient X et Y les centres des cercles inscrits de BAE et CAD respectivement. On suppose enfin que les tangentes externes des cercles inscrits de BAE et CAD se coupent en Z. Montrez que Z est situé sur la corde commune de Γ et du cercle circonscrit à AXY.

P5. Un rectangle R est divisé en un ensemble fini S de rectangles plus petits dont les côtés sont parallèles à ceux de R, de sorte qu'aucun sous-ensemble de trois rectangles de S ne partage un coin commun. Une fourmi est initialement placée dans le coin inférieur gauche de R. En une seule opération, nous pouvons choisir un rectangle $r \in S$ tel que la fourmi se trouve actuellement à l'un des coins de r, disons c, et déplacer la fourmi vers l'un des deux coins de r adjacents à c.

Supposons qu'après un nombre fini d'opérations, la fourmi se retrouve dans le coin supérieur droit de R. Montrez qu'un certain rectangle $r \in S$ a été choisi en au moins deux opérations.