Olympiade mathématique junior du Canada
Ensemble de problèmes officiel 2025

J1. Supposons qu'une progression arithmétique non constante infinie d'entiers contienne 1. Montrez qu'il y a une infinité de cubes parfaits dans cette progression.

(Un cube parfait est un nombre entier de la forme k^3, où k est un nombre entier. Par exemple, -8, 0 et 1 sont des cubes parfaits).

J2. Soit $ABCD$ un trapèze dont les côtés parallèles sont AB et CD, où $BC \neq DA$. Un cercle passant par C et D coupe AC, AD, BC et BD à nouveau en W, X, Y et Z, respectivement. Montrez que WZ, XY et AB sont concourants.

J3. Les n joueurs d'une équipe de hockey se réunissent pour choisir leur capitaine. Au départ, ils se placent en cercle et chacun vote pour la personne qui se trouve à sa gauche.

Les joueurs mettront à jour leurs votes au cours d'une série de tours. Lors d'un tour, un joueur a met à jour son vote, un à la fois, selon la procédure suivante : Si, au moment de cette mise à jour, a vote pour b, et b vote pour c, alors a met à jour son vote en faveur de c. (Notez que a, b et c ne sont pas nécessairement distincts ; si $b = c$, alors le vote de a ne change pas lors de cette mise à jour). Chaque joueur met à jour son vote exactement une fois à chaque tour, dans un ordre déterminé par les joueurs (qui peut être différent d'un tour à l'autre).

Ils répètent cette procédure de mise à jour pendant n tours. Montrez qu'à ce moment, les n joueurs voteront unanimement pour la même personne.

J4. Déterminez tous les entiers strictement positifs a, b, c, p tels que p et $p + 2$ sont des nombres premiers impairs et

$$2^a p^b = (p + 2)^c - 1.$$

J5. Un polynôme $c_d x^d + c_{d-1}x^{d-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ de degré d est appelé *réflexif* s'il existe un entier $n \geq d$ tel que $c_i = c_{n-i}$ pour tout $0 \leq i \leq n$, où $c_i = 0$ pour $i > d$. Soit $\ell \geq 2$ un entier et $p(x)$ un polynôme à coefficients entiers. Montrez qu'il existe des polynômes réflexifs $q(x), r(x)$ à coefficients entiers tels que

$$(1 + x + x^2 + \cdots + x^{\ell-1})p(x) = q(x) + x^\ell r(x).$$

