P1. Les n joueurs d'une équipe de hockey se réunissent pour choisir leur capitaine. Au départ, ils se placent en cercle et chacun vote pour la personne qui se trouve à sa gauche.

Les joueurs mettront à jour leurs votes au cours d'une série de tours. Lors d'un tour, un joueur a met à jour son vote, un à la fois, selon la procédure suivante : Si, au moment de cette mise à jour, a vote pour b, et b vote pour c, alors a met à jour son vote en faveur de c. (Notez que a, b et c ne sont pas nécessairement distincts ; si $b = c$, alors le vote de a ne change pas lors de cette mise à jour). Chaque joueur met à jour son vote exactement une fois à chaque tour, dans un ordre déterminé par les joueurs (qui peut être différent d'un tour à l'autre).

Ils répètent cette procédure de mise à jour pendant n tours. Montrez qu'à ce moment, les n joueurs voteront unanimement pour la même personne.

Commentaire. *Malheureusement, le niveau de difficulté de ce problème est le résultat d'une erreur administrative involontaire. La version de ce problème qui avait été initialement prévue pour le concours était beaucoup plus facile. Elle disait : ≪Ils répètent la même procédure de mise à jour le deuxième jour, le troisième jour, et ainsi de suite. Prouvez que finalement, tous les joueurs voteront unanimement pour la même personne≫. En d'autres termes, il n'y avait pas de limite à n tours.*

Solution 1

Au départ, tous les joueurs sont dans un cycle. Il est à noter qu'une fois qu'un joueur quitte le cycle, il ne peut plus le rejoindre. En outre, il n'est pas possible de créer un nouveau cycle. Par conséquent, à tout moment, le graphe correspondant aux votes sera un graphe fonctionnel avec un seul cycle.

Nous allons d'abord prouver qu'après $\lfloor \log_2 n \rfloor$ tours, le cycle deviendra une boucle. Ensuite, nous montrerons que lors des $\lfloor \log_2 n \rfloor$ tours suivants, tous les autres joueurs votent pour le joueur dans la boucle.

Pour montrer la première étape, supposons que le cycle a une taille $K > 1$ au début d'un tour. Considérons un joueur arbitraire a dans le cycle qui met à jour son vote. Disons que $a \to b \to c$, tous dans le cycle. Alors $a \to c$ désormais, faisant ainsi sortir b du cycle et réduisant sa taille à $K - 1$. Notez que b peut maintenant mettre à jour son vote sans affecter la taille du cycle. Si nous considérons tous les K joueurs initiaux du cycle, nous constatons qu'au moins $\lceil \frac{K}{2} \rceil$ d'entre eux doivent encore être dans le cycle au moment de leur mise à jour, et donc la taille du cycle est réduite à au plus $\lfloor \frac{K}{2} \rfloor$. Après $\lfloor \log_2 n \rfloor$ tours, le cycle doit être réduit à une taille de 1.

Maintenant que le cycle a été réduit à un seul joueur, disons z, considérons n'importe quel chemin allant d'un joueur a à z. Aucun joueur ne peut être ajouté à ce chemin. Avec un argument similaire à celui du cycle, la longueur du chemin doit diminuer de moitié à chaque tour. En particulier, un chemin de longueur L vers le cycle est réduit à la longueur $\lceil \frac{L}{2} \rceil$ (notez la fonction plafond, nous avions la fonction plancher pour le cycle). Après $\lceil \log_2 n \rceil$ tours, le chemin doit être réduit à la longueur 1.

Ainsi, après $\lfloor \log_2 n \rfloor + \lceil \log_2 n \rceil$ tours, le graphe a été complètement réduit. Pour $n \geq 5$, $\lfloor \log_2 n \rfloor + \lceil \log_2 n \rceil \leq 2\lfloor \log_2 n \rfloor + 1 \leq n$. Pour les autres n, nous pouvons vérifier manuellement que $\lfloor \log_2 n \rfloor + \lceil \log_2 n \rceil \leq n$.

Commentaire 1. Dans cette preuve, il est important que nous considérions la taille du cycle et la taille des chemins dans des tours disjoints. Dans les tours où la taille du cycle diminue, il est possible que la taille des chemins augmente de Cn pour une certaine constante C.

Commentaire 2. Cette preuve peut en fait être affinée pour prouver que $\log_2 n + O(\log_2 \log_2 n)$ tours sont suffisants (et les constructions montrent que c'est nécessaire). Considérons un joueur fixe a et le chemin de a vers le cycle tel qu'il change à travers les tours. Lors du tour i, notons ℓ_i le nombre de joueurs qui faisaient partie du cycle au début du tour i, et qui sont devenus partie de ce chemin au cours du tour i. (Notez qu'il est possible qu'un joueur ne fasse partie du chemin que pendant une partie du tour i, et qu'il ne fasse plus partie du chemin à la fin. Il doit tout de même être compté). Nous pouvons voir que ℓ_i est limité par la taille du cycle au début du tour i, qui est $\leq \frac{n}{2^{i-1}}$.

Notez maintenant que la taille de ce chemin après le tour k est au maximum de

$$1 + \frac{\ell_1}{2^{k-1}} + \frac{\ell_2}{2^{k-2}} + \ldots + \frac{\ell_{k-1}}{2} + \ell_k \leq 1 + \frac{kn}{2^{k-1}}.$$

Par conséquent, lorsque $k = \log_2 n + C \log_2 \log_2 n$ pour C suffisamment grand, on doit avoir que chaque joueur vote pour la boucle.

Solution 2

On procède par induction sur n.

Hypothèse d'induction. Soit G un graphe fonctionnel avec n nœuds et un seul cycle. Après n tours de l'opération donnée, G deviendra une boucle avec $n-1$ nœuds pointant vers elle.

Étape d'initialisation. Les cas $n \leq 2$ sont évidents.

Étape inductive. Supposons que l'hypothèse soit prouvée pour $n = k-1$ et $n = k-2$. Nous allons la prouver pour $n = k$. Considérons un graphe fonctionnel initial avec k noeuds et un seul cycle. Notez qu'il existe un noeud a qui a un degré entrant de 0 (c'est-à-dire qu'aucun noeud ne pointe vers lui), ou bien tous les noeuds k sont dans le cycle.

Dans le premier cas, considérons $G \setminus \{a\}$. Notez que toutes les opérations, à l'exception des mises à jour de a, sont indépendantes de l'endroit où se trouve a. Par hypothèse inductive, après $k-1$ tours, $G \setminus \{a\}$ est devenu une boucle unique et $k-2$ nœuds pointant vers elle. Quelle que soit la position de a, il pointera vers la boucle après un tour supplémentaire et nous aurons terminé.

Dans le cas où tous les k noeuds sont dans un cycle, considérons la toute première opération $z \to a \to b \implies z \to b, a \to b$. Cela crée un noeud de degré entrant zéro a, mais l'opération de z a été utilisée pour le premier cycle et l'hypothèse inductive ne peut donc pas être appliquée naïvement. Au lieu de cela, considérons $b \to c$ (possiblement $c = z$ si $k = 3$). À un moment donné du premier tour, b sera mis à jour. Soit c deviendra un autre noeud de degré entrant zéro, soit a sera le seul noeud pointant vers c. Dans les deux cas, considérons $G \setminus \{a, c\}$. Par hypothèse d'induction, après les tours 2 à $k-1$, ce graphe deviendra une boucle avec $k-3$ noeuds pointant vers lui. Il est également facile de voir que a et c ont tous les deux un degré entrant zéro après le tour 2. Alors dans un autre tour après le tour $k-1$, on doit avoir a et c qui pointent vers la boucle. On a donc terminé pour $n = k$.

Par induction, nous avons terminé pour tout n.

Commentaire. Si le problème était plutôt de prouver le résultat après $2n$ tours, l'induction serait beaucoup plus facile.

P2. Déterminez tous les entiers strictement positifs a, b, c, p tels que p et $p+2$ sont des nombres premiers impairs et
$$2^a p^b = (p+2)^c - 1.$$

Solution

La seule solution est $(a, b, c, p) = (3, 1, 2, 3)$. Tout d'abord, factorisons le côté droit. Cela nous donne

$$2^a p^b = (p+1)((p+2)^{c-1} + (p+2)^{c-2} + \cdots + (p+2) + 1).$$

Puisque PGCD$(p, p+1) = 1$, il doit y avoir $p + 1 = 2^x$ pour un entier positif $x \leq a$ et donc $p = 2^x - 1$ et $p + 2 = 2^x + 1$. Maintenant, pour $x \geq 3$, $2^x + 1$ n'est pas premier si x est impair (puisqu'il est 0 mod 3) et $2^x - 1$ n'est pas premier si x est pair (puisqu'il est 0 mod 3). Cela signifie que $x \leq 2$, et le seul x admissible est $x = 2$ car sinon p n'est pas premier. Ainsi, l'équation originale devient

$$2^a 3^b = 5^c - 1.$$

Or, $3|(5^c - 1)$, donc en évaluant $5^c - 1$ mod 3 on obtient $c = 2d$ pour un entier positif d et donc
$$2^a 3^b = (5^d - 1)(5^d + 1).$$

Observons que $5^d - 1$ et $5^d + 1$ sont tous deux pairs et que leur plus grand diviseur commun est 2 car ils sont distants de 2. Puisque $4|(5^d - 1)$ cela implique $5^d - 1 = 2^{a-1}$ et $5^d + 1 = 2 \cdot 3^b$. Or, 3 n'est pas un facteur de $5^d - 1$ car $5^d - 1 = 2^{a-1}$. Ainsi, en évaluant mod 3, d doit être impair. Si $d > 1$, c'est impossible car
$5^d - 1 = (5-1)(5^{d-1} + 5^{d-2} + \cdots + 5 + 1)$ et ce dernier facteur a un facteur premier impair, ce qui contredit $5^d - 1$ est une puissance de 2. Donc $d = 1$ et donc $c = 2$, ce qui implique que $2^a 3^b = 24$ donc $a = 3$ et $b = 1$. La seule solution est donc
$(a, b, c, p) = (3, 1, 2, 3)$.

P3. Un polynôme $c_d x^d + c_{d-1}x^{d-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ de degré d est appelé *réflexif* s'il existe un entier $n \geq d$ tel que $c_i = c_{n-i}$ pour tout $0 \leq i \leq n$, où $c_i = 0$ pour $i > d$. Soit $\ell \geq 2$ un entier et $p(x)$ un polynôme à coefficients entiers. Montrez qu'il existe des polynômes réflexifs $q(x), r(x)$ à coefficients entiers tels que

$$(1 + x + x^2 + \cdots + x^{\ell-1})p(x) = q(x) + x^\ell r(x).$$

Solution 1

Soit d le degré de p et k un entier non négatif. On choisit

$$q(x) = \frac{x^{d+k+\ell}p\left(\frac{1}{x}\right) - p(x)}{x-1},$$
$$r(x) = \frac{p(x) - x^{d+k}p\left(\frac{1}{x}\right)}{x-1}.$$

Tout d'abord, on doit montrer que q et r sont des polynômes entiers. Considérons le numérateur de la définition de q, $x^{d+k+\ell}p\left(\frac{1}{x}\right) - p(x)$. Il s'agit clairement d'un polynôme entier. Comme il est égal à 0 lorsqu'il est évalué en $x - 1$, alors $x - 1$ le divise. De plus, comme $x - 1$ est monique (ou unitaire), le quotient a des coefficients entiers.
L'argument pour r est similaire.

Ensuite, nous montrerons que ce choix de q et r satisfait l'équation souhaitée. En les introduisant dans la partie droite de l'équation, on obtient

$$\begin{aligned}
q(x) + x^\ell r(x) &= \frac{x^{d+k+\ell}p\left(\frac{1}{x}\right) - p(x)}{x-1} + x^\ell\left(\frac{p(x) - x^{d+k}p\left(\frac{1}{x}\right)}{x-1}\right)\\
&= \frac{x^{d+k+\ell}p\left(\frac{1}{x}\right) - p(x) + x^\ell p(x) - x^{d+k+\ell}p\left(\frac{1}{x}\right)}{x-1}\\
&= \left(\frac{x^\ell - 1}{x-1}\right)p(x)\\
&= (1 + x + \cdots + x^{\ell-1})p(x)
\end{aligned}$$

comme souhaité.

Enfin, on montrera que q et r sont effectivement réflexifs. On peut réinterpréter la condition de réflexivité comme suit :

Le polynôme $a(x)$ est réflexif s'il existe un entier $n \geq \deg(a)$ pour lequel

$$a(x) = x^n a\left(\frac{1}{x}\right).$$

On a

$$\begin{aligned}
q(x) &= \frac{x^{d+k+\ell}p\left(\frac{1}{x}\right) - p(x)}{x-1} \\
&= x^{d+k+\ell-1} \cdot \frac{p\left(\frac{1}{x}\right) - x^{-(d+k+\ell)}p(x)}{\frac{x-1}{x}} \\
&= x^{d+k+\ell-1} \cdot \frac{x^{-(d+k+\ell)}p(x) - p\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x} - 1} \\
&= x^{d+k+\ell-1} q\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

comme souhaité. De manière similaire,

$$\begin{aligned}
r(x) &= \frac{p(x) - x^{d+k}p\left(\frac{1}{x}\right)}{x-1} \\
&= x^{d+k-1} \cdot \frac{x^{-(d+k)}p(x) - p\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{x-1}{x}} \\
&= x^{d+k-1} \cdot \frac{p\left(\frac{1}{x}\right) - x^{-(d+k)}p(x)}{\frac{1}{x} - 1} \\
&= x^{d+k-1} r\left(\frac{1}{x}\right).
\end{aligned}$$

Solution 2

On écrit le polynôme$p$ de degré n comme suit

$$p(x) := \sum_{i=0}^{n} p_i x^i.$$

Définissons le vecteur $P \in \mathbb{Z}^{n+1}$ comme suit

$$P := \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & \cdots & p_n \end{pmatrix}^T.$$

On désigne également $X \in \mathbb{Z}[x]^N$ pour un degré N suffisamment élevé (par exemple $N > 2n + \ell$) comme le vecteur des puissances de x, c'est-à-dire

$$X := \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \cdots & x^{N-1} \end{pmatrix}^T.$$

Pour une matrice $M \in \mathbb{Z}^{(n+1)\times N}$, $P^T M X$ est un polynôme entier de degré $< N$. Notons que si les entrées non nulles de la matrice M sont horizontalement symétriques, alors le polynôme résultant doit être réflexif.

Soit A la matrice correspondant à $(1+x+\cdots+x^{\ell-1})p(x)$. Les entrées non nulles de la matrice forment un parallélogramme. En particulier, A est une matrice creuse avec des 1 sur les diagonales supérieures de ℓ. Par exemple, pour $\ell=3, n=4$,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & & & & & & \cdots \\ & 1 & 1 & 1 & & & & & \cdots \\ & & 1 & 1 & 1 & & & & \cdots \\ & & & 1 & 1 & 1 & & & \cdots \\ & & & & 1 & 1 & 1 & & \cdots \end{pmatrix}.$$

On va maintenant construire les matrices $Q, R \in \mathbb{Z}^{(n+1)\times N}$ de telle sorte que Q et R correspondent respectivement à $q(x)$ et $x^\ell r(x)$. Ainsi, nous avons besoin de

$$\begin{aligned} & (1+x+x^2+\cdots+x^{\ell-1})p(x) = q(x)+x^\ell r(x) \\ \iff \quad & P^TAX = P^TQX + P^TRX \\ \iff \quad & P^T(A-Q-R)X = 0. \end{aligned}$$

Il suffit donc de trouver Q et R horizontalement symétriques et tels que $Q+R=A$. Notons que les premières colonnes de R doivent aussi être nulles.

Il s'avère que de nombreuses constructions existent. Par exemple, considérons Q avec 1 entrées formant un triangle isocèle avec une base de 0 à $2n$:

$$Q=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \cdots \\ & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & \cdots \\ & & & 1 & 1 & 1 & & & & \cdots \\ & & & & 1 & & & & & \cdots \end{pmatrix}.$$

Alors la différence $R=A-Q$ est

$$R=\begin{pmatrix} & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots \\ & & -1 & -1 & -1 & -1 & & \cdots \\ & & & -1 & -1 & & & \cdots \\ & & & & & & & \cdots \\ & & & 1 & 1 & & & \cdots \end{pmatrix}.$$

L'extension de cette structure triangulaire à un trapèze isocèle (même auto-intersecté) fonctionne également. Plus rigoureusement, définissons Q comme la matrice dont les entrées sont 1 au niveau du trapèze isocèle à partir des entrées (indexées par zéro)

$$(0,0),(0,n+k),(n,k),(n,n)$$

dans cet ordre, pour tout entier non négatif k avec $k \geq \ell$ (si nous choisissons $k<n$, les entrées peuvent être -1 pour tenir compte de l'auto-intersection). Définissons R comme la matrice dont les entrées sont -1 au trapèze isocèle à partir des entrées

$$(0,\ell),(0,n+k),(n,k),(n,n+\ell).$$

Alors leur total est la matrice dont les entrées sont 1 au parallélogramme formé par

$$(0,0),(0,\ell-1),(n,n+\ell-1),(n,n),$$

qui est précisément A.

P4. Soit ABC un triangle dont le cercle circonscrit est Γ et $AB \neq AC$. Soient D et E des points situés sur l'arc BC de Γ qui ne contient pas A de sorte que $\angle BAE = \angle DAC$. Soient X et Y les centres des cercles inscrits de BAE et CAD respectivement. On suppose enfin que les tangentes externes des cercles inscrits de BAE et CAD se coupent en Z. Montrez que Z est situé sur la corde commune de Γ et du cercle circonscrit à AXY.

Solution

Supposons que AX et AY coupent à nouveau (ABC) en P et Q, que les rayons des cercles inscrits à ABE et ACD soient r_B et r_C, et que (AXY) coupe à nouveau (ABC) en N.

Notons d'abord que $\angle BAP = \frac{1}{2}\angle BAE = \frac{1}{2}\angle CAD = \angle QAC$, donc $XP = BP = CQ = CY$. Ceci implique donc que, puisque NXP et NYQ sont spiralement semblables, $NX = NY$ et $NP = NQ$ (en particulier, N est le milieu de l'arc XAY sur (AXY)). Notons maintenant que

$$\begin{aligned}\frac{ZX}{ZY} &= \frac{r_b}{r_c}\\ &= \frac{AX\sin(\angle PAE)}{AY\sin(\angle QAD)}\\ &= \frac{AX}{AY}.\end{aligned}$$

Puisque Z se trouve sur le rayon YX, on a que Z se trouve sur la bissectrice externe de $\angle XAY$. Mais N aussi, donc Z, A et N sont colinéaires, comme désiré.

P5. Un rectangle R est divisé en un ensemble fini S de rectangles plus petits dont les côtés sont parallèles à ceux de R, de sorte qu'aucun sous-ensemble de trois rectangles de S ne partage un coin commun. Une fourmi est initialement placée dans le coin inférieur gauche de R. En une seule opération, nous pouvons choisir un rectangle $r \in S$ tel que la fourmi se trouve actuellement à l'un des coins de r, disons c, et déplacer la fourmi vers l'un des deux coins de r adjacents à c.

Supposons qu'après un nombre fini d'opérations, la fourmi se retrouve dans le coin supérieur droit de R. Montrez qu'un certain rectangle $r \in S$ a été choisi en au moins deux opérations.

Solution 1

Considérons la version suivante du problème :

> Un rectangle R est divisé en un ensemble S d'un nombre fini de rectangles plus petits, de sorte qu'aucun des trois rectangles de S ne partage un coin commun. Pour chaque $r \in S$, traçons deux arcs non intersectionnels à l'intérieur de r, reliant les paires de coins adjacents de r (il y a deux façons de le faire, en reliant soit les coins adjacents horizontalement, soit les coins adjacents verticalement). Prouvez qu'il n'existe pas de chemin allant du coin inférieur gauche de R au coin supérieur droit de R en marchant uniquement le long de ces arcs.

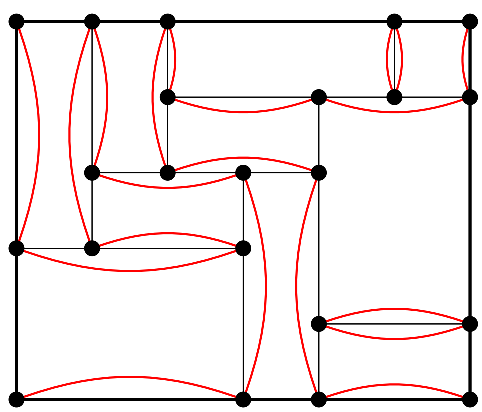

Figure 1 – Un diagramme possible de tous les arcs.

Dans ce problème, on considère un graphe non orienté où les nœuds correspondent aux coins des rectangles dans S et les arêtes correspondent aux arcs, reliant les deux nœuds que l'arc relie. Les degrés des noeuds correspondant aux coins de R sont tous exactement 1. Comme aucun des trois rectangles de S ne partage un coin commun, tous les points d'intersection ont un motif comme $\vdash$, $\dashv$, $\perp$, ou $\top$, de sorte que le degré de tous les autres nœuds est exactement 2. Par conséquent, ce graphe peut être décomposé en plusieurs chemins et cycles. Les seules extrémités possibles des chemins sont les noeuds de degré 1, qui sont les coins de R. Il s'ensuit que s'il existe un chemin allant du coin inférieur gauche au coin supérieur droit de R, alors il existe aussi un chemin allant du coin inférieur droit au coin supérieur gauche de R. Cependant, ceci est impossible car ces deux chemins (vus comme des courbes planes à l'intérieur de R) doivent se croiser, ce qui ne peut pas se produire. Par conséquent, cette affirmation est démontrée.

Pour revenir au problème initial, supposons que certaines opérations ont été effectuées en choisissant chaque rectangle au plus une fois. Traçons deux arcs à l'intérieur de chaque rectangle, soit tous les deux horizontaux si la fourmi a utilisé ce rectangle pour se déplacer horizontalement, soit tous les deux verticaux si la fourmi a utilisé ce rectangle pour se déplacer verticalement (ou choisissons-en un arbitrairement si ce rectangle n'a pas été utilisé). Par la nouvelle version du problème, il n'existe pas de chemin entre le coin inférieur gauche et le coin supérieur droit de R, et il s'ensuit qu'il est impossible pour la fourmi d'avoir atteint le coin supérieur droit de R, ce qui achève la démonstration.

Solution 2

Supposons qu'aucun rectangle n'ait été choisi dans au moins deux opérations. En particulier, un rectangle ne peut pas être choisi dans deux opérations consécutives.

À tout moment du processus, on considère si le dernier mouvement de la fourmi était horizontal ou vertical, et si le dernier rectangle choisi était à gauche ou à droite de la trajectoire de la fourmi. Lors du premier déplacement, soit la fourmi s'est déplacée horizontalement et le rectangle était à gauche, soit la fourmi s'est déplacée verticalement et le rectangle était à droite. Nous affirmons que cet invariant est préservé tout au long du processus (voir la Figure 2 pour un exemple de chemin). En supposant cette affirmation, le mouvement final vers le coin supérieur droit doit sélectionner le rectangle supérieur droit. S'il est vertical, il est à gauche du chemin, et s'il est horizontal, il est à droite du chemin, les deux étant impossibles, ce qui constitue une contradiction.

Les deux sont impossibles, ce qui constitue une contradiction.

Il reste à montrer que l'invariant est préservé. Puisque quatre rectangles ne peuvent pas se croiser dans un coin, chaque intersection a un motif comme $\vdash$, $\dashv$, $\perp$, ou $\top$.

Tout d'abord, supposons que la fourmi se déplace vers le haut, et que le rectangle choisi r se trouve donc à droite. Les configurations possibles sont représentées dans les deux premiers diagrammes de la Figure 3.

Dans chaque cas, la fourmi doit choisir le rectangle s suivant (pour éviter de répéter r deux fois), et nous voyons que les deux choix latéraux préservent un déplacement

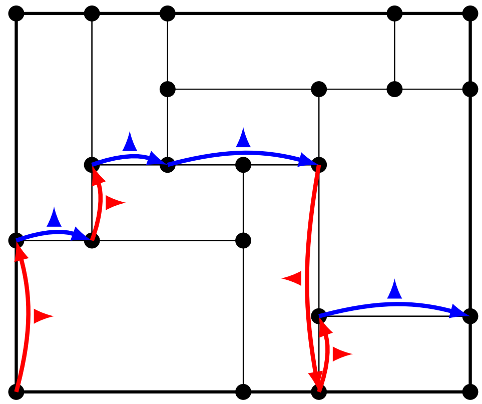

FIGURE 2 – Un parcours possible de la fourmi. Les flèches rouges sont toutes verticales, avec le rectangle correspondant à droite. Les flèches bleues sont toutes horizontales, avec le rectangle correspondant à gauche.

horizontal avec s à gauche, ou un déplacement vertical avec s à droite. En faisant pivoter l'image de 180°, nous couvrons les deux possibilités de déplacement de la fourmi vers le bas.

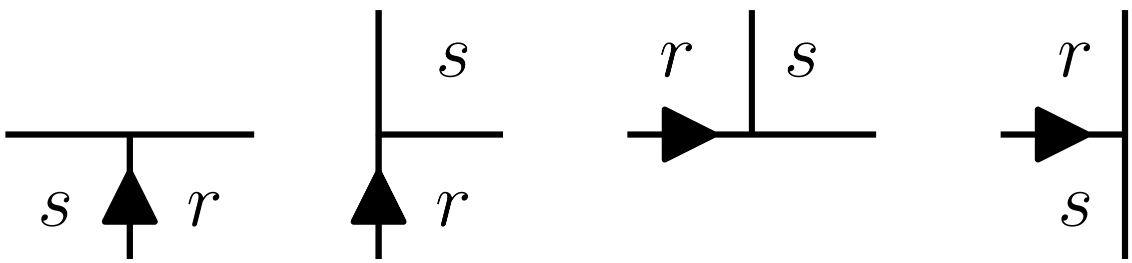

FIGURE 3 – Les mouvements possibles de la fourmi vers le haut ou vers la droite

Si la fourmi se déplace vers la droite, alors r doit se trouver à gauche, et les configurations possibles sont les deux derniers diagrammes de la Figure 3. Une fois de plus, le rectangle s doit être choisi ensuite, et l'invariant est préservé de la même façon. Le cas où la fourmi se déplace vers la gauche est à nouveau traité par une rotation de 180°, ce qui complète la preuve.

Solution 3

Il s'agit d'une variante de la solution 2. Comme dans cette preuve, on suppose qu'aucun rectangle n'a été choisi lors de deux opérations consécutives. On affirme qu'à chaque déplacement, la fourmi se trouve dans le coin inférieur gauche ou supérieur droit du rectangle choisi, et se déplace vers le coin inférieur droit ou supérieur gauche.

Ceci est clairement vrai pour le premier mouvement. Si la fourmi commence en bas à gauche ou en haut à droite lors d'un déplacement (en choisissant le rectangle r), il est clair qu'elle doit se déplacer en bas à droite ou en haut à gauche de r. Supposons qu'elle se soit déplacé vers le coin inférieur droit de r, et qu'elle ait choisi le rectangle s lors de son prochain déplacement. Si elle se trouve dans le coin inférieur droit de s, alors r et s sont soit égaux, soit ils se chevauchent, ce qui est une contradiction. Si elle est en haut à gauche de s, alors r et s se coupent à un coin et à aucun côté, et on doit avoir 4 rectangles qui se coupent à un coin, ce qui est à nouveau une contradiction.

Par conséquent, elles doit se trouver au coin inférieur gauche ou supérieur droit de s, comme désiré. Le cas où la fourmi se trouve dans le coin supérieur gauche de r est analogue.

Si la fourmi est capable d'atteindre le coin supérieur droit, son dernier mouvement doit sélectionner r comme rectangle supérieur droit, et elle se déplace vers le coin supérieur droit, ce qui est donc impossible.

