**J1.** Supposons qu'une progression arithmétique non constante infinie d'entiers contienne 1. Montrez qu'il y a une infinité de cubes parfaits dans cette progression.

(Un cube parfait est un nombre entier de la forme $k^3$, où $k$ est un nombre entier. Par exemple, $-8$, 0 et 1 sont des cubes parfaits).

## Solution

Soit $a$ et $d$ respectivement le premier terme et la différence commune de la progression arithmétique. Il est clair que $a$ et $d$ sont tous deux des entiers. De plus, comme la progression arithmétique n'est pas constante, $d \neq 0$ (mais il peut être positif ou négatif !). Notons que pour tout entier $k$,

$$\begin{aligned}(1+kd)^3 &= 1+3(kd)+3(kd)^2+(kd)^3\\ &= 1+d(3k+3k^2d+k^3d^2).\end{aligned}$$

Il est clair que si $d$ est positif, alors il existe une infinité d'entiers *positifs* $\ell$ tels que

$$\ell = 3k+3k^2d+k^3d^2$$

pour un certain entier $k$. Pour ces valeurs de $\ell$, $1+d\ell$ est dans la progression arithmétique et c'est un cube parfait. La preuve est achevée.

Supposons maintenant que $d$ est négatif. Puisque

$$3k+3k^2d+k^3d^2 = 3k+(k^2d)(3+kd)$$

et que $k^2d$ et $3+kd$ sont tous deux négatifs et décroissants avec $k$ pour $k \geq 4$, on obtient à nouveau qu'il existe une infinité d'entiers *positifs* $\ell$ satisfaisant la même égalité. La preuve est achevée.

**J2.** Soit $ABCD$ un trapèze dont les côtés parallèles sont $AB$ et $CD$, où $BC \neq DA$. Un cercle passant par $C$ et $D$ coupe $AC$, $AD$, $BC$ et $BD$ à nouveau en $W$, $X$, $Y$ et $Z$, respectivement. Montrez que $WZ$, $XY$ et $AB$ sont concourants.

## Solution

$\angle AXY = 180° - \angle DXY = \angle YCD = 180° - \angle ABC$, donc $ABYX$ et de manière similaire $ABZW$ sont tous deux cycliques.

De plus, par hypothèse, $XYZW$ est cyclique.

Notons que $AB$ est l'axe radical des cercles $(ABYX)$ et $(ABZW)$. De manière similaire, $XY$ est l'axe radical de $(ABYX)$ et $(XYZW)$. Enfin, $WZ$ est l'axe radical de $(ABZW)$ et $(XYZW)$. Le résultat découle du fait que trois cercles, pris par paires, ont des axes radicaux concourants.

**J3.** Les $n$ joueurs d'une équipe de hockey se réunissent pour choisir leur capitaine. Au départ, ils se placent en cercle et chacun vote pour la personne qui se trouve à sa gauche.

Les joueurs mettront à jour leurs votes au cours d'une série de tours. Lors d'un tour, un joueur $a$ met à jour son vote, un à la fois, selon la procédure suivante : Si, au moment de cette mise à jour, $a$ vote pour $b$, et $b$ vote pour $c$, alors $a$ met à jour son vote en faveur de $c$. (Notez que $a$, $b$ et $c$ ne sont pas nécessairement distincts ; si $b = c$, alors le vote de $a$ ne change pas lors de cette mise à jour). Chaque joueur met à jour son vote exactement une fois à chaque tour, dans un ordre déterminé par les joueurs (qui peut être différent d'un tour à l'autre).

Ils répètent cette procédure de mise à jour pendant $n$ tours. Montrez qu'à ce moment, les $n$ joueurs voteront unanimement pour la même personne.

***Commentaire.*** *Malheureusement, le niveau de difficulté de ce problème est le résultat d'une erreur administrative involontaire. La version de ce problème qui avait été initialement prévue pour le concours était beaucoup plus facile. Elle disait : ≪Ils répètent la même procédure de mise à jour le deuxième jour, le troisième jour, et ainsi de suite. Prouvez que finalement, tous les joueurs voteront unanimement pour la même personne≫. En d'autres termes, il n'y avait pas de limite à $n$ tours.*

## Solution 1

Au départ, tous les joueurs sont dans un cycle. Il est à noter qu'une fois qu'un joueur quitte le cycle, il ne peut plus le rejoindre. En outre, il n'est pas possible de créer un nouveau cycle. Par conséquent, à tout moment, le graphe correspondant aux votes sera un graphe fonctionnel avec un seul cycle.

Nous allons d'abord prouver qu'après $\lfloor \log_2 n \rfloor$ tours, le cycle deviendra une boucle. Ensuite, nous montrerons que lors des $\lfloor \log_2 n \rfloor$ tours suivants, tous les autres joueurs votent pour le joueur dans la boucle.

Pour montrer la première étape, supposons que le cycle a une taille $K > 1$ au début d'un tour. Considérons un joueur arbitraire $a$ dans le cycle qui met à jour son vote. Disons que $a \to b \to c$, tous dans le cycle. Alors $a \to c$ désormais, faisant ainsi sortir $b$ du cycle et réduisant sa taille à $K - 1$. Notez que $b$ peut maintenant mettre à jour son vote sans affecter la taille du cycle. Si nous considérons tous les $K$ joueurs initiaux du cycle, nous constatons qu'au moins $\lceil \frac{K}{2} \rceil$ d'entre eux doivent encore être dans le cycle au moment de leur mise à jour, et donc la taille du cycle est réduite à au plus $\lfloor \frac{K}{2} \rfloor$. Après $\lfloor \log_2 n \rfloor$ tours, le cycle doit être réduit à une taille de 1.

Maintenant que le cycle a été réduit à un seul joueur, disons $z$, considérons n'importe quel chemin allant d'un joueur $a$ à $z$. Aucun joueur ne peut être ajouté à ce chemin. Avec un argument similaire à celui du cycle, la longueur du chemin doit diminuer de moitié à chaque tour. En particulier, un chemin de longueur $L$ vers le cycle est réduit à la longueur $\lceil \frac{L}{2} \rceil$ (notez la fonction plafond, nous avions la fonction plancher pour le cycle). Après $\lceil \log_2 n \rceil$ tours, le chemin doit être réduit à la longueur 1.

Ainsi, après $\lfloor \log_2 n \rfloor + \lceil \log_2 n \rceil$ tours, le graphe a été complètement réduit. Pour $n \geq 5$, $\lfloor \log_2 n \rfloor + \lceil \log_2 n \rceil \leq 2\lfloor \log_2 n \rfloor + 1 \leq n$. Pour les autres $n$, nous pouvons vérifier manuellement que $\lfloor \log_2 n \rfloor + \lceil \log_2 n \rceil \leq n$.

**Commentaire 1.** Dans cette preuve, il est important que nous considérions la taille du cycle et la taille des chemins dans des tours disjoints. Dans les tours où la taille du cycle diminue, il est possible que la taille des chemins augmente de $Cn$ pour une certaine constante $C$.

**Commentaire 2.** Cette preuve peut en fait être affinée pour prouver que $\log_2 n + O(\log_2 \log_2 n)$ tours sont suffisants (et les constructions montrent que c'est nécessaire). Considérons un joueur fixe $a$ et le chemin de $a$ vers le cycle tel qu'il change à travers les tours. Lors du tour $i$, notons $\ell_i$ le nombre de joueurs qui faisaient partie du cycle au début du tour $i$, et qui sont devenus partie de ce chemin au cours du tour $i$. (Notez qu'il est possible qu'un joueur ne fasse partie du chemin que pendant une partie du tour $i$, et qu'il ne fasse plus partie du chemin à la fin. Il doit tout de même être compté). Nous pouvons voir que $\ell_i$ est limité par la taille du cycle au début du tour $i$, qui est $\leq \frac{n}{2^{i-1}}$.

Notez maintenant que la taille de ce chemin après le tour $k$ est au maximum de

$$1 + \frac{\ell_1}{2^{k-1}} + \frac{\ell_2}{2^{k-2}} + \ldots + \frac{\ell_{k-1}}{2} + \ell_k \leq 1 + \frac{kn}{2^{k-1}}.$$

Par conséquent, lorsque $k = \log_2 n + C \log_2 \log_2 n$ pour $C$ suffisamment grand, on doit avoir que chaque joueur vote pour la boucle.

## Solution 2

On procède par induction sur $n$.

**Hypothèse d'induction.** Soit $G$ un graphe fonctionnel avec $n$ nœuds et un seul cycle. Après $n$ tours de l'opération donnée, $G$ deviendra une boucle avec $n-1$ nœuds pointant vers elle.

**Étape d'initialisation.** Les cas $n \leq 2$ sont évidents.

**Étape inductive.** Supposons que l'hypothèse soit prouvée pour $n = k-1$ et $n = k-2$. Nous allons la prouver pour $n = k$. Considérons un graphe fonctionnel initial avec $k$ noeuds et un seul cycle. Notez qu'il existe un noeud $a$ qui a un degré entrant de 0 (c'est-à-dire qu'aucun noeud ne pointe vers lui), ou bien tous les noeuds $k$ sont dans le cycle.

Dans le premier cas, considérons $G \setminus \{a\}$. Notez que toutes les opérations, à l'exception des mises à jour de $a$, sont indépendantes de l'endroit où se trouve $a$. Par hypothèse inductive, après $k-1$ tours, $G \setminus \{a\}$ est devenu une boucle unique et $k-2$ nœuds pointant vers elle. Quelle que soit la position de $a$, il pointera vers la boucle après un tour supplémentaire et nous aurons terminé.

Dans le cas où tous les $k$ noeuds sont dans un cycle, considérons la toute première opération $z \to a \to b \implies z \to b, a \to b$. Cela crée un noeud de degré entrant zéro $a$, mais l'opération de $z$ a été utilisée pour le premier cycle et l'hypothèse inductive ne peut donc pas être appliquée naïvement. Au lieu de cela, considérons $b \to c$ (possiblement $c = z$ si $k = 3$). À un moment donné du premier tour, $b$ sera mis à jour. Soit $c$ deviendra un autre noeud de degré entrant zéro, soit $a$ sera le seul noeud pointant vers $c$. Dans les deux cas, considérons $G \setminus \{a, c\}$. Par hypothèse d'induction, après les tours 2 à $k-1$, ce graphe deviendra une boucle avec $k-3$ noeuds pointant vers lui. Il est également facile de voir que $a$ et $c$ ont tous les deux un degré entrant zéro après le tour 2. Alors dans un autre tour après le tour $k-1$, on doit avoir $a$ et $c$ qui pointent vers la boucle. On a donc terminé pour $n = k$.

Par induction, nous avons terminé pour tout $n$.

**Commentaire.** Si le problème était plutôt de prouver le résultat après $2n$ tours, l'induction serait beaucoup plus facile.

 

**J4.** Déterminez tous les entiers strictement positifs $a, b, c, p$ tels que $p$ et $p+2$ sont des nombres premiers impairs et

$$2^a p^b = (p+2)^c - 1.$$

## Solution

La seule solution est $(a, b, c, p) = (3, 1, 2, 3)$. Tout d'abord, factorisons le côté droit. Cela nous donne

$$2^a p^b = (p+1)((p+2)^{c-1} + (p+2)^{c-2} + \cdots + (p+2) + 1).$$

Puisque $\mathrm{PGCD}(p, p+1) = 1$, il doit y avoir $p + 1 = 2^x$ pour un entier positif $x \leq a$ et donc $p = 2^x - 1$ et $p + 2 = 2^x + 1$. Maintenant, pour $x \geq 3$, $2^x + 1$ n'est pas premier si $x$ est impair (puisqu'il est 0 mod 3) et $2^x - 1$ n'est pas premier si $x$ est pair (puisqu'il est 0 mod 3). Cela signifie que $x \leq 2$, et le seul $x$ admissible est $x = 2$ car sinon $p$ n'est pas premier. Ainsi, l'équation originale devient

$$2^a 3^b = 5^c - 1.$$

Or, $3|(5^c - 1)$, donc en évaluant $5^c - 1$ mod 3 on obtient $c = 2d$ pour un entier positif $d$ et donc

$$2^a 3^b = (5^d - 1)(5^d + 1).$$

Observons que $5^d - 1$ et $5^d + 1$ sont tous deux pairs et que leur plus grand diviseur commun est 2 car ils sont distants de 2. Puisque $4|(5^d - 1)$ cela implique $5^d - 1 = 2^{a-1}$ et $5^d + 1 = 2 \cdot 3^b$. Or, 3 n'est pas un facteur de $5^d - 1$ car $5^d - 1 = 2^{a-1}$. Ainsi, en évaluant mod 3, $d$ doit être impair. Si $d > 1$, c'est impossible car $5^d - 1 = (5-1)(5^{d-1} + 5^{d-2} + \cdots + 5 + 1)$ et ce dernier facteur a un facteur premier impair, ce qui contredit $5^d - 1$ est une puissance de 2. Donc $d = 1$ et donc $c = 2$, ce qui implique que $2^a 3^b = 24$ donc $a = 3$ et $b = 1$. La seule solution est donc $(a, b, c, p) = (3, 1, 2, 3)$.

**J5.** Un polynôme $c_d x^d + c_{d-1}x^{d-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ de degré $d$ est appelé *réflexif* s'il existe un entier $n \geq d$ tel que $c_i = c_{n-i}$ pour tout $0 \leq i \leq n$, où $c_i = 0$ pour $i > d$. Soit $\ell \geq 2$ un entier et $p(x)$ un polynôme à coefficients entiers. Montrez qu'il existe des polynômes réflexifs $q(x), r(x)$ à coefficients entiers tels que

$$(1 + x + x^2 + \cdots + x^{\ell-1})p(x) = q(x) + x^\ell r(x).$$

## Solution 1

Soit $d$ le degré de $p$ et $k$ un entier non négatif. On choisit

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{x^{d+k+\ell}p\left(\frac{1}{x}\right) - p(x)}{x-1}, \\ r(x) &= \frac{p(x) - x^{d+k}p\left(\frac{1}{x}\right)}{x-1}. \end{aligned}$$

Tout d'abord, on doit montrer que $q$ et $r$ sont des polynômes entiers. Considérons le numérateur de la définition de $q$, $x^{d+k+\ell}p\left(\frac{1}{x}\right) - p(x)$. Il s'agit clairement d'un polynôme entier. Comme il est égal à 0 lorsqu'il est évalué en $x - 1$, alors $x - 1$ le divise. De plus, comme $x - 1$ est monique (ou unitaire), le quotient a des coefficients entiers. L'argument pour $r$ est similaire.

Ensuite, nous montrerons que ce choix de $q$ et $r$ satisfait l'équation souhaitée. En les introduisant dans la partie droite de l'équation, on obtient

$$\begin{aligned} q(x) + x^\ell r(x) &= \frac{x^{d+k+\ell}p\left(\frac{1}{x}\right) - p(x)}{x-1} + x^\ell\left(\frac{p(x) - x^{d+k}p\left(\frac{1}{x}\right)}{x-1}\right) \\ &= \frac{x^{d+k+\ell}p\left(\frac{1}{x}\right) - p(x) + x^\ell p(x) - x^{d+k+\ell}p\left(\frac{1}{x}\right)}{x-1} \\ &= \left(\frac{x^\ell - 1}{x-1}\right)p(x) \\ &= (1 + x + \cdots + x^{\ell-1})p(x) \end{aligned}$$

comme souhaité.

Enfin, on montrera que $q$ et $r$ sont effectivement réflexifs. On peut réinterpréter la condition de réflexivité comme suit :

Le polynôme $a(x)$ est réflexif s'il existe un entier $n \geq \deg(a)$ pour lequel

$$a(x) = x^n a\left(\frac{1}{x}\right).$$

 

On a

$$\begin{aligned}
q(x) &= \frac{x^{d+k+\ell}p\left(\frac{1}{x}\right) - p(x)}{x-1} \\
&= x^{d+k+\ell-1} \cdot \frac{p\left(\frac{1}{x}\right) - x^{-(d+k+\ell)}p(x)}{\frac{x-1}{x}} \\
&= x^{d+k+\ell-1} \cdot \frac{x^{-(d+k+\ell)}p(x) - p\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x} - 1} \\
&= x^{d+k+\ell-1} q\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

comme souhaité. De manière similaire,

$$\begin{aligned}
r(x) &= \frac{p(x) - x^{d+k}p\left(\frac{1}{x}\right)}{x-1} \\
&= x^{d+k-1} \cdot \frac{x^{-(d+k)}p(x) - p\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{x-1}{x}} \\
&= x^{d+k-1} \cdot \frac{p\left(\frac{1}{x}\right) - x^{-(d+k)}p(x)}{\frac{1}{x} - 1} \\
&= x^{d+k-1} r\left(\frac{1}{x}\right).
\end{aligned}$$

## Solution 2

On écrit le polynôme$p$ de degré $n$ comme suit

$$p(x) := \sum_{i=0}^{n} p_i x^i.$$

Définissons le vecteur $P \in \mathbb{Z}^{n+1}$ comme suit

$$P := \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & \cdots & p_n \end{pmatrix}^T.$$

On désigne également $X \in \mathbb{Z}[x]^N$ pour un degré $N$ suffisamment élevé (par exemple $N > 2n + \ell$) comme le vecteur des puissances de $x$, c'est-à-dire

$$X := \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \cdots & x^{N-1} \end{pmatrix}^T.$$

Pour une matrice $M \in \mathbb{Z}^{(n+1)\times N}$, $P^T M X$ est un polynôme entier de degré $< N$. Notons que si les entrées non nulles de la matrice $M$ sont horizontalement symétriques, alors le polynôme résultant doit être réflexif.

Soit $A$ la matrice correspondant à $(1+x+\cdots+x^{\ell-1})p(x)$. Les entrées non nulles de la matrice forment un parallélogramme. En particulier, $A$ est une matrice creuse avec des 1 sur les diagonales supérieures de $\ell$. Par exemple, pour $\ell = 3, n = 4$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & & & & & \cdots \\ & 1 & 1 & 1 & & & & \cdots \\ & & 1 & 1 & 1 & & & \cdots \\ & & & 1 & 1 & 1 & & \cdots \\ & & & & 1 & 1 & 1 & \cdots \end{pmatrix}.$$

On va maintenant construire les matrices $Q, R \in \mathbb{Z}^{(n+1)\times N}$ de telle sorte que $Q$ et $R$ correspondent respectivement à $q(x)$ et $x^\ell r(x)$. Ainsi, nous avons besoin de

$$\begin{aligned} & (1+x+x^2+\cdots+x^{\ell-1})p(x) = q(x) + x^\ell r(x) \\ \iff \quad & P^T A X = P^T Q X + P^T R X \\ \iff \quad & P^T (A - Q - R) X = 0. \end{aligned}$$

Il suffit donc de trouver $Q$ et $R$ horizontalement symétriques et tels que $Q + R = A$. Notons que les premières colonnes de $R$ doivent aussi être nulles.

Il s'avère que de nombreuses constructions existent. Par exemple, considérons $Q$ avec 1 entrées formant un triangle isocèle avec une base de 0 à $2n$ :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \cdots \\ & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & \cdots \\ & & & 1 & 1 & 1 & & & & \cdots \\ & & & & 1 & & & & & \cdots \end{pmatrix}.$$

Alors la différence $R = A - Q$ est

$$R = \begin{pmatrix} & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots \\ & & -1 & -1 & -1 & -1 & & \cdots \\ & & & -1 & -1 & & & \cdots \\ & & & & & & & \cdots \\ & & & 1 & 1 & & & \cdots \end{pmatrix}.$$

L'extension de cette structure triangulaire à un trapèze isocèle (même auto-intersecté) fonctionne également. Plus rigoureusement, définissons $Q$ comme la matrice dont les entrées sont 1 au niveau du trapèze isocèle à partir des entrées (indexées par zéro)

$$(0,0), (0, n+k), (n, k), (n, n)$$

dans cet ordre, pour tout entier non négatif $k$ avec $k \geq \ell$ (si nous choisissons $k < n$, les entrées peuvent être $-1$ pour tenir compte de l'auto-intersection). Définissons $R$ comme la matrice dont les entrées sont $-1$ au trapèze isocèle à partir des entrées

$$(0, \ell), (0, n+k), (n, k), (n, n+\ell).$$

Alors leur total est la matrice dont les entrées sont 1 au parallélogramme formé par

$$(0,0),(0,\ell-1),(n,n+\ell-1),(n,n),$$

qui est précisément $A$.

 