Le Défi ouvert canadien de mathématiques 2022

Solutions officielles

L'examen compte trois sections :

A. Quatre questions d'introduction valant quatre points chacune. On peut accorder des notes partielles pour le travail démontré.

B. Quatre autres questions plus difficiles valant six points chacune. On peut accorder des notes partielles pour le travail démontré.

C. Quatre problèmes détaillés de démonstration valant 10 points chacune.

Les examens du DOCM des années passées, questionnaire seulement ou avec les solutions, sont disponibles à l'adresse suivante : https://docm.math.ca/2022/preparation/

© 2022 Société mathématique du Canada
9 janvier 2023

Section A

A1. John avait une boîte de bonbons. Le premier jour, il a mangé exactement la moitié des bonbons et en a donné un à sa petite sœur. Le deuxième jour, il a mangé exactement la moitié des bonbons restants et en a donné un à sa petite sœur. Le troisième jour, il a mangé exactement la moitié des bonbons restants et en a donné un à sa petite sœur, après quoi il ne restait plus aucun bonbon. Combien de bonbons y avait-il dans la boîte au départ ?

Solution 1 : On peut procéder à rebours. Au début du troisième jour, Jean avait 2 bonbons. Au début du deuxième jour, il avait $2 \times (2+1) = 6$ bonbons. Au début du premier jour, il avait $2 \times (6+1) = 14$ bonbons. Il y avait donc 14 bonbons dans la boîte au départ.

Solution 2 : Supposons qu'il y avait x bonbons dans la boîte au départ. Après le premier jour, il y a $\frac{x}{2} - 1$ bonbons. Après le deuxième jour, il y a

$$\frac{\frac{x}{2} - 1}{2} - 1$$

bonbons et, après le dernier jour, il y a

$$\frac{\frac{\frac{x}{2}-1}{2} - 1}{2} - 1 = 0$$

bonbons. En développant le côté gauche, on voit que cela est équivalent à

$$\frac{x}{8} - \frac{7}{4} = 0,$$

on obtient $x = 8 \times \frac{7}{4} = 14$.

Réponse : $\boxed{14}$.

A2. Un palindrome est un nombre entier dont les chiffres sont identiques lorsqu'ils sont lus de gauche à droite ou de droite à gauche. Par exemple, 565 et 7887 sont des palindromes. Trouvez le plus petit palindrome à six chiffres divisible par 12.

Solution : Nous avons besoin d'un nombre de la forme $\overline{abccba}$ qui soit divisible à la fois par 3 et par 4. Il faut donc que la somme des chiffres $2a + 2b + 2c$ soit divisible par 3 et que le nombre formé par les deux derniers chiffres $10b + a$ soit divisible par 4. En raison de la deuxième condition, il est impossible d'avoir $a = 1$. Le plus petit nombre doit donc vérifier $a \geq 2$. Si $a = 2$, alors il est impossible d'avoir $b = 0$, toujours en raison de la deuxième condition. On doit donc avoir $b \geq 1$. Le nombre 210012 satisfait aux deux conditions. Il s'agit donc du plus petit palindrome à six chiffres divisible par 12.

Réponse : $\boxed{210012}$.

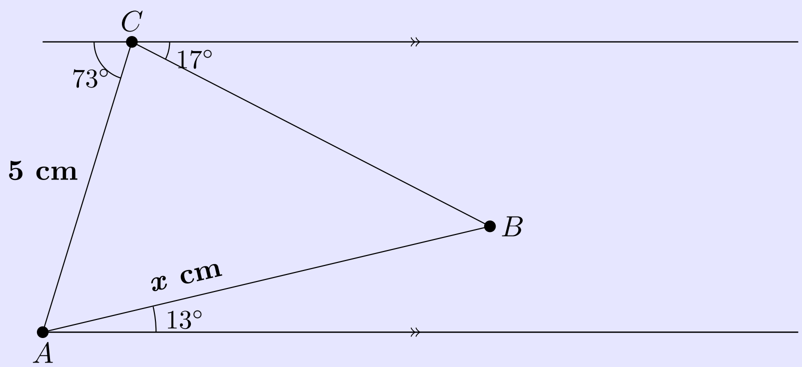
 © 2022 Société mathématique du Canada

A3. Au départ, il y a quatre boules rouges, sept boules vertes, huit boules bleues, dix boules blanches et onze boules noires sur une table. Chaque minute, nous pouvons repeindre l'une des balles dans l'une des quatre autres couleurs. Quel est le nombre minimum de minutes après lequel le nombre de boules de chacune des cinq couleurs est le même ?

Solution : Il doit y avoir huit boules de chaque couleur à la fin. Ainsi, il faut repeindre au moins deux boules blanches et trois boules noires ; on peut les repeindre en quatre boules rouges et une boule verte, pour un total de cinq retouches de peinture en cinq minutes.

Réponse : $\boxed{5}$.

A4. Un triangle ABC se trouve entre deux droites parallèles, tel qu'indiqué dans le diagramme ci-dessous. Si le segment AC a une longueur de 5 cm, quelle est la longueur (en cm) du segment AB ?



Solution : Par le théorème des angles supplémentaires, le triangle vérifie $\measuredangle C = 180° - (73° + 17°) = 90°$.
Par le théorème des angles alternatifs, le triangle vérifie $\measuredangle A = 73° - 13° = 60°$.
L'angle interne restant du triangle vérifie $\measuredangle B = 180° - \measuredangle A - \measuredangle C = 30°$.

Dans le triangle rectangle dont les angles sont 30°-60°-90°, la mesure de l'hypoténuse est le double de la mesure du côté opposé à l'angle de 30°. Ainsi, le côté manquant mesure 10 cm.

Réponse : $\boxed{\text{x} = 10}$.

© 2022 Société mathématique du Canada

Section B

B1. La fonction plancher de tout nombre réel a est le nombre entier noté $\lfloor a \rfloor$ tel que $\lfloor a \rfloor \leq a$ et $\lfloor a \rfloor > a - 1$. Par exemple, $\lfloor 5 \rfloor = 5$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$ et $\lfloor -1.5 \rfloor = -2$.
Trouvez la différence entre la plus grande solution entière de l'équation $\lfloor x/3 \rfloor = 102$ et la plus petite solution entière de l'équation $\lfloor x/3 \rfloor = -102$.

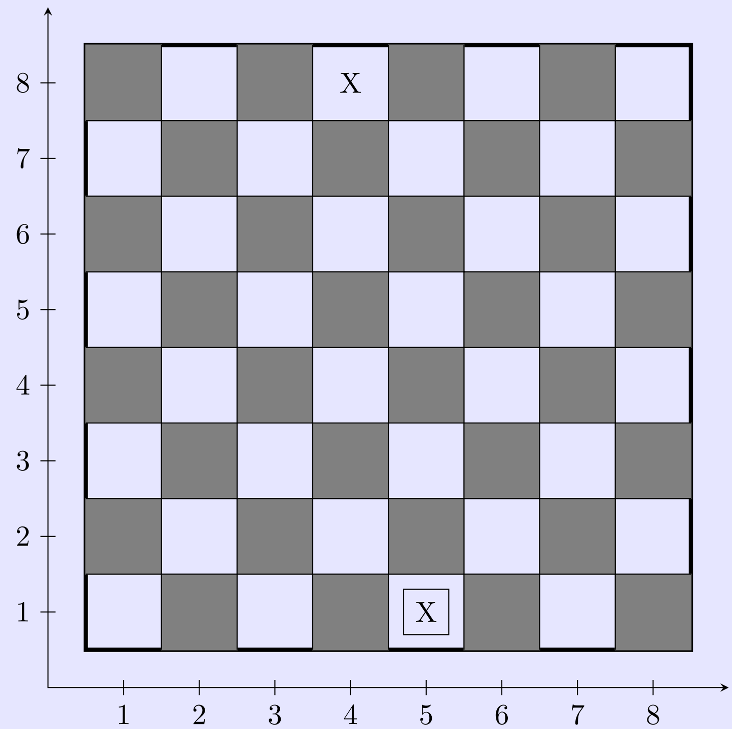
Solution : Afin que $\lfloor x/3 \rfloor = 102$, il faut que $103 > x/3 \geq 102$, d'où $309 > x \geq 306$. Ainsi, x doit être 306, 307 ou 308. La plus grande solution est donc 308.

Afin que $\lfloor x/3 \rfloor = -102$, il faut que $-101 > x/3 \geq -102$, d'où $-303 > x \geq -306$. Ainsi, x doit être $-306, -305$ ou -304. La plus petite solution est donc -306.

Réponse : $308 - (-306) = \boxed{614}$.

 © 2022 Société mathématique du Canada

B2. Un général de pierre est une pièce d'échecs qui se déplace d'une case en diagonale vers le haut à chaque coup ; c'est-à-dire qu'il peut se déplacer de la coordonnée (a, b) vers l'une ou l'autre des coordonnées $(a-1, b+1)$ ou $(a+1, b+1)$.
Combien de façons y a-t-il pour un général de pierre de se déplacer de $(5, 1)$ à $(4, 8)$ en sept coups sur un échiquier standard 8 par 8 ?



Solution 1 : Puisque nous sommes limités à $8-1=7$ déplacements et que nous voulons passer de $a=5$ à $a=4$, on doit effectuer 4 déplacements vers le nord-ouest et 3 déplacements vers le nord-est. Remarquons qu'on ne sort pas de la grille avec un enchaînement de 4 déplacements vers le nord-ouest et 3 déplacements vers le nord-est car il y a 4 cases à gauche de la position initiale et 3 cases à droites de celle-ci.

Ainsi, toute séquence de 4 coups nord-ouest et 3 coups nord-est fonctionne et la réponse est $\binom{7}{3}=\binom{7}{4}=35$.

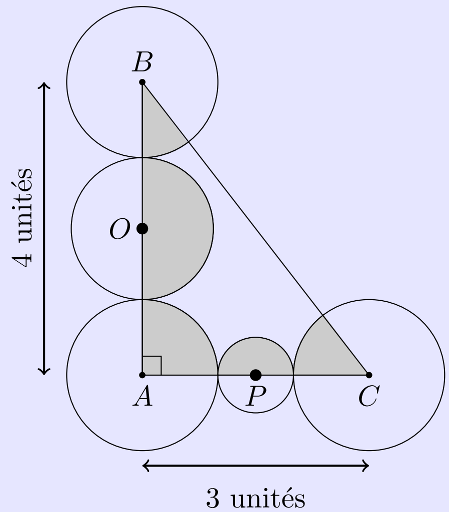
Solution 2 : Pour chaque case (i, j), soit $P(i, j)$ le nombre de façons d'arriver à (i, j) à partir de $(5, 1)$ en effectuant $j - 1$ déplacements. On a donc $P(i, j) = P(i - 1, j - 1) + P(i + 1, j - 1)$. En commençant avec $P(5, 1) = 1$ et des zéros dans toutes les autres cases de la première ligne, on calcule que $P(4, 8) = 35$, tel qu'indiqué ci-dessous.

	20		**35**		34		14
5		15		20		14	
	5		10		10		4
1		4		6		4	
	1		3		3		1
		1		2		1	
			1		1		
0	0	0	0	**1**	0	0	0

Answer : $\boxed{x = 35}$.

 © 2022 Société mathématique du Canada

B3. Dans le diagramme ci-dessous, le triangle rectangle ABC a des côtés de longueur $AC = 3$ unités, $AB = 4$ unités et $BC = 5$ unités. Les cercles centrés autour des sommets du triangle ont tous le même rayon et le cercle de centre O a une aire 4 fois supérieure à celle du cercle de centre P. L'aire ombragée est de $k\pi$ unités carrées.
Combien vaut k ?



Solution : Comme $A_\circ = \pi r^2$, le rapport des aires $4 = \dfrac{A_{(O)}}{A_{(P)}} = \dfrac{\pi r^2_{(O)}}{\pi r^2_{(P)}}$ se réduit au rapport $\dfrac{r_{(O)}}{r_{(P)}} = \sqrt{4} = 2$, donc $r_{(O)} = 2r_{(P)}$. Si x désigne $r_{(P)}$ et si y désigne le rayon des cercles d'angle. Alors $r_{(O)} = 2x$ et $y + 2x + y = 3$, $y + 4x + y = 4$. En soustrayant $2x + 2y = 3$ de $4x + 2y = 4$ on obtient $x = 1/2$ et il s'ensuit que $y = 1$.

Ainsi, $r_{(O)} = 1$ et $r_{(P)} = 1/2$.

La somme des angles internes d'un triangle est de π, donc la région ombragée est

$$A = \frac{\pi y^2}{2} + \frac{\pi r^2_{(O)}}{2} + \frac{\pi r^2_{(P)}}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} = \frac{9}{8}\pi \implies \boxed{k = \frac{9}{8}}.$$

Réponse : $\boxed{k = \dfrac{9}{8}}$.

B4. Déterminez tous les entiers a pour lesquels $\dfrac{a}{1011-a}$ est un entier pair.

Solution 1 : Posons $\frac{a}{1011-a} = 2k$ pour un certain entier k et effectuons la substitution $a = 1011 - b$. On a

$$2k = \frac{a}{1011-a} = \frac{1011-b}{b} = \frac{1011}{b} - 1.$$

Il faut donc que $\frac{1011}{b}$ soit un nombre entier impair. Comme $1011 = 3 \times 337$, tous les facteurs de 1011 (positifs et négatifs) sont impairs. On cherche les $b \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 337, \pm 1011\}$ qui correspondent aux solutions $\boxed{a \in \{1010, 1012, 1008, 1014, 674, 1348, 0, 2022\}}$, respectivement.

En d'autres termes, il s'agit des entiers a pour lesquels $\frac{a}{1011-a}$ est un entier pair issu de l'ensemble

$$\{1011 - b \text{ tel que } b|1011\}.$$

Solution 2 : Comme dans la solution précédente, posons $\frac{a}{1011-a} = 2k$. En réarrangeant les termes, on obtient

$$\frac{a}{1011-a} = 2k \iff a + 2ka = 2022k \iff a = \frac{2022k}{1+2k}. \tag{1}$$

Observons maintenant que k et $1 + 2k$ sont co-premiers. On doit donc avoir $1 + 2k \,|\, 2022$; c'est-à-dire que l'on cherche des diviseurs impairs de 2022. Comme $2022 = 2 \times 1011 = 2 \times 3 \times 337$, il s'agit de $1 + 2k = \pm 1, \pm 3, \pm 337$ ou ± 1011. En utilisant l'équation (1), on conclu que

$1 + 2k = 1 \implies \boxed{a = 0}$,

$1 + 2k = 3 \implies \boxed{a = 674}$,

$1 + 2k = 337 \implies \boxed{a = 1008}$,

$1 + 2k = 1011 \implies \boxed{a = 1010}$,

$1 + 2k = -1 \implies \boxed{a = 2022}$,

$1 + 2k = -3 \implies \boxed{a = 1348}$,

$1 + 2k = -337 \implies \boxed{a = 1014}$,

$1 + 2k = -1011 \implies \boxed{a = 1012}$,

Réponse : $\boxed{a \in \{1010, 1012, 1008, 1014, 674, 1348, 0, 2022\}}$

 © 2022 Société mathématique du Canada

Section C

C1.

a. Trouvez toutes les valeurs entières de a pour lesquelles l'équation $x^2 + ax + 1 = 0$ n'admet pas de solution réelle en x.

b. Trouvez toutes les paires d'entiers (a, b) pour lesquelles ni l'équation

$$x^2 + ax + b = 0 \quad \text{ni l'équation} \quad x^2 + bx + a = 0$$

admet une solution réelle en x.

c. Combien y-a-t-il de paires ordonnées (a, b) d'entiers positifs vérifiant $a \leq 8$ et $b \leq 8$ et pour lesquelles chacunes des équations

$$x^2 + ax + b = 0 \quad \text{et} \quad x^2 + bx + a = 0$$

admettent deux uniques solutions réelles en x ?

Solution :

a. Pour que l'équation n'admette pas de solutions réelles, il faut que $a^2 - 4 < 0$, d'où $|a| < 2$. Ainsi, $\boxed{a = 0, \pm 1}$.
Réponse : $\boxed{a = 0, \pm 1}$.

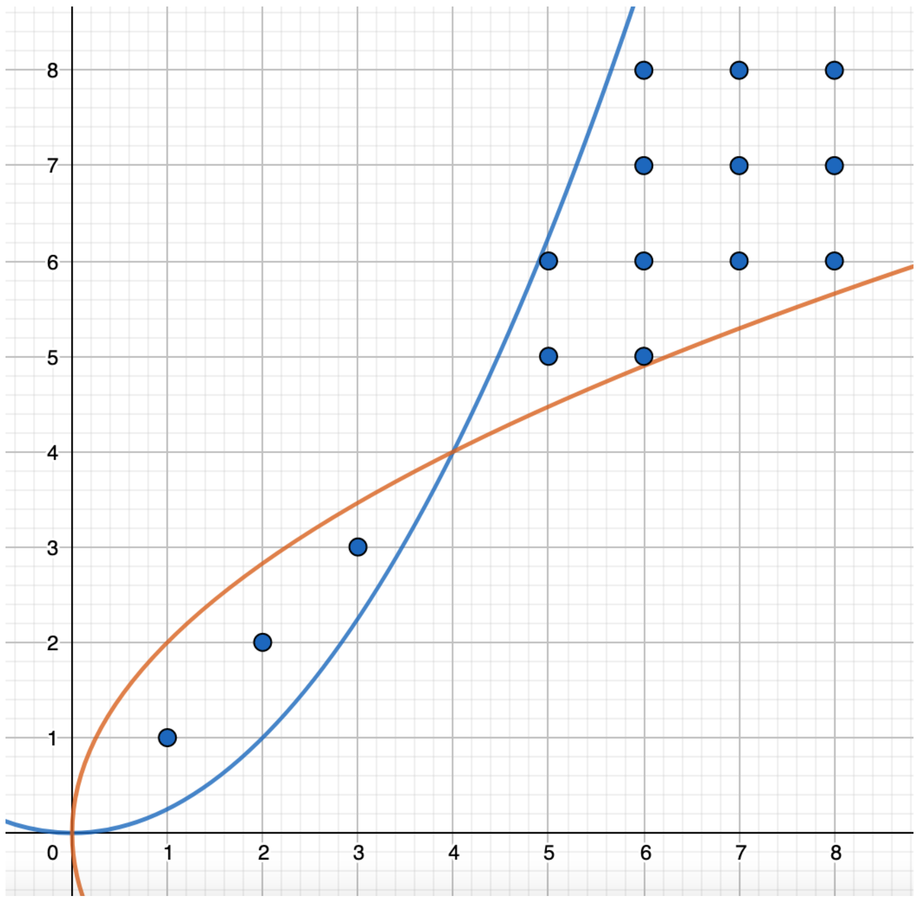
b. Il faut que $a^2 - 4b < 0$ et $b^2 - 4a < 0$. Donc $a^2 < 4b$ et $b^2 < 4a$. Ainsi, a et b sont donc tous deux positifs et on peut multiplier les inégalités ci-dessus pour obtenir

$$a^2b^2 < 16ab \iff ab < 16.$$

Au moins un parmi a et b est donc inférieur à 4 ; si $a < 4$, alors $b^2 < 4a < 16$, de sorte que $b < 4$ aussi. De même, si $b < 4$, alors $a < 4$ aussi. Par vérification directe, on trouve les paires : $\boxed{(1, 1), (2, 2), (3, 3)}$.
Réponse : $\boxed{(1, 1), (2, 2), (3, 3)}$.

c. Pour obtenir deux solutions uniques, il faut que $a^2 - 4b > 0$ et $b^2 - 4a > 0$.
Comme $a^2 > 4b$ et $b^2 > 4a$, on a (par la même logique que ci-dessus) que $ab > 16$. Si $a > 4$, alors $b^2 > 4a > 16$, d'où $b > 4$ aussi. On a donc que a et b sont tous deux supérieurs à 4.
Si $a = 5$ alors $4b < 25$ et $b^2 > 20$, d'où $b = 5, 6$;
Si $a = 6$ alors $4b < 36$ et $b^2 > 24$, d'où $b = 5, 6, 7, 8$;
De même,
$a = 7, b = 6, 7, 8$;
$a = 8, b = 6, 7, 8$.
Réponse : $\boxed{12}$.

Une solution graphique pour (b) e (c) est présentée ci-dessous. On trace les courbes $a^2 = 4b$ et $b^2 = 4a$, puis on identifie les points du quadrillages dans les régions respectives $1 \leq a \leq 8$, $1 \leq b \leq 8$.

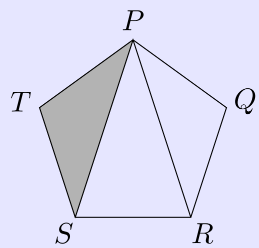


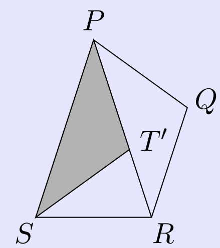
 © 2022 Société mathématique du Canada

C2.

a. Montrez que les deux diagonales abaissées d'un sommet d'un pentagone régulier trisectent l'angle au sommet.

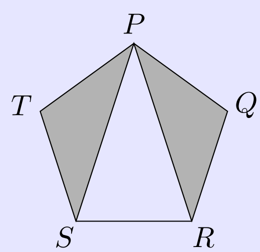
b. Puisque les diagonales trisectent l'angle, si le pentagone régulier $PQRST$ est plié le long de la diagonale SP, alors le côté TP tombera sur la diagonale PR, comme illustré ci-dessous. Ici, T' désigne la position du sommet T après le pliage.

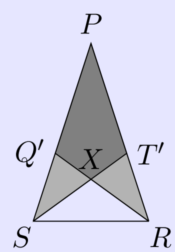




Trouvez le rapport $\frac{PT'}{T'R}$. Exprimez votre réponse sous la forme $\frac{a+\sqrt{b}}{c}$, où a, b et c sont des entiers.

c. Le pentagone régulier $PQRST$ a une aire de 1 unité carrée. Le pentagone est plié le long des diagonales SP et RP tel qu'illustré à droite. Ici, T' et Q' désignent respectivement la position des sommets T et Q après le pliage. Les segments ST' et RQ' se rencontrent en X.





Déterminez l'aire (en unités carrées) du triangle non recouvert XSR. Exprimez votre réponse sous la forme $\frac{a+\sqrt{b}}{c}$, où a, b, c sont des entiers.

Solution :

a. La somme des angles d'un pentagone régulier est de $180° \times (5-2) = 540°$. Chaque angle d'un pentagone régulier est de $540°/5 = 108°$.

Comme tous les côtés sont égaux, SPT et RPQ sont des triangles isocèles. Ainsi, $\angle SPT = (180° - 108°)/2 = 36°$. De même, $\angle RPQ = (180° - 108°)/2 = 36°$. Alors, $\angle SPR = 108° - 2 \times 36° = 36°$.

Ainsi, les diagonales SP et RP trisectent l'angle TPQ.

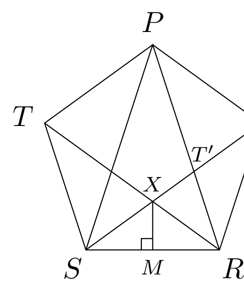
© 2022 Société mathématique du Canada

b. Sans perte de généralité, supposons que le pentagone a des côtés de longueur 1. Les triangles SPR et $ST'R$ sont des triangles isocèles semblables avec des angles $(36°, 72°, 72°)$. Soit x la longueur de la diagonale. Alors on a $\frac{SP}{SR} = \frac{SR}{T'R}$ et il en découle que $\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$. Alors $x^2 - x - 1 = 0$ et il s'ensuit que $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. On néglige la deuxième racine de l'équation car elle est négative.

Le rapport désiré est $\frac{PT'}{T'R} = \frac{1}{x-1} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Réponse : $\boxed{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

On peut aussi faire le calcul suivant qui, de toute façon, s'avèrera utile en (c). Remarquons que T' se trouve sur la diagonale SQ, tout comme X. Observons que
$SX = QT' = SQ - ST' = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

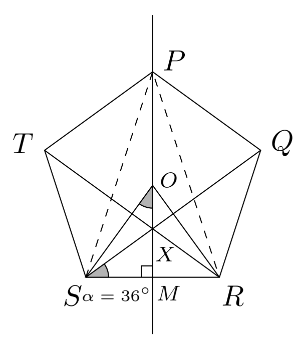


Soit M le point milieu de SR, donc $SM = 1/2$. Cela implique que
$\cos(36°) = \frac{SM}{SX} = \frac{1}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

De même, à partir du triangle rectangle SXM, on obtient $XM^2 = \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{5-2\sqrt{5}}{4}$ et
$XM = \frac{\sqrt{5-\sqrt{20}}}{2}$. Alors $XM/SM = \sqrt{5-\sqrt{20}} = \tan(XSM) = \tan(36°)$.

c. **Solution 1 :**

Soit O le centre du pentagone. Du triangle rectangle SOM, on trouve $SM/OM = \tan(SOM)$, d'où $OM = SM/\tan(36°)$.
L'aire $[PQRST] = 5[ROS] = \frac{5}{2}SR \cdot OM = 5SM \cdot OM = 5(SM)^2/\tan(36°) = 1$.



Ainsi, $(SM)^2 = \frac{1}{5}\tan(36°)$.

 © 2022 Société mathématique du Canada

Du triangle rectangle SXM (voir (b)), on trouve $XM/SM = \tan(XSM)$, d'où
$XM = SM\tan(36°)$.
L'aire $[XSR] = 2[SXM] = SM \cdot XM = (SM)^2 \tan(36°) = \frac{1}{5}\tan^2(36°)$.
Puisque $\tan(36°) = \sqrt{5-\sqrt{20}}$, comme nous l'avons vu en (b), l'aire est $\boxed{\frac{5-\sqrt{20}}{5}}$.
Commentaire : Il est possible de formuler une solution alternative évitant le recours à $\tan(36°)$ en utilisant le fait que $\frac{XM}{SM} = \frac{SM}{OM}$.

Solution 2 :
Soit a la longueur du côté du pentagone. Alors, à partir du triangle isocèle 36°-36°-108° PTS, où $PT = TS = a$, la diagonale $PS = 2a\cos(36°)$. On exprime l'aire de STP et de SPR en fonction de a.

$$[SPT] = \frac{a^2}{2}\sin(108°) = \frac{a^2}{2}\sin(72°), \quad [SPR] = a^2\cos(36°)\sin(72°).$$

Comme $[SPR] + 2[SPT] = 1$, on a $a^2\sin(72°)(1+\cos(36°)) = 1$ et on obtient
$a^2 = (\sin(72°)(1+\cos(36°))^{-1}$. On utilise également $\cos(36°) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ tel qu'indiqué ci-dessus et $1+\cos(36°) = \frac{\sqrt{5}+5}{4}$ ainsi que $(1+\cos(36°))^{-1} = \frac{5-\sqrt{5}}{5}$, pour obtenir

$$[SPT] = \frac{1}{2(1+\cos(36°))} = \frac{5-\sqrt{5}}{10}, \quad [SPR] = \frac{\cos(36°)}{1+\cos(36°)} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

On remarque maintenant que XTS et SPR sont semblables. Puisque $SX/SR = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, le coefficient de similitude des triangles est le carré de ce rapport, à savoir $\frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.
Enfin,

$$[SXR] = [SRT] - [XTS] = \frac{5-\sqrt{5}}{10} - \frac{3-\sqrt{5}}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{5-2\sqrt{5}}{5}.$$

C3. Yana et Zahid jouent à un jeu. Yana lance sa paire de dés équitables à six faces et dessine un rectangle dont la longueur et la largeur correspondent aux deux nombres qu'elle a obtenu. Zahid lance sa paire de dés équitables à six faces et dessine un carré dont la longueur du côté est conforme à la règle indiquée ci-dessous.

a. Supposons que Zahid utilise toujours le nombre du premier de ses deux dés comme longueur du côté de son carré, et ignore le second. Qui, de Yana et Zahid, aura en moyenne la plus grande aire, et de combien est-elle plus grande ?

b. Supposons maintenant que Zahid dessine un carré dont la longueur du côté est égale au minimum des résultats de ses deux dés. Quelle est la probabilité que les formes de Yana et de Zahid aient la même aire ?

c. Supposons à nouveau que Zahid dessine un carré dont la longueur du côté est égale au minimum de ses deux résultats aux dés. Soit $D = \text{Aire}_{\text{Yana}} - \text{Aire}_{\text{Zahid}}$ la différence entre l'aire de la figure de Yana et l'aire de la figure de Zahid. Trouvez l'espérance de D.

Solution :

a. L'aire moyenne de Zahid est :

$$\frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2}{6} = \frac{1+4+9+16+25+36}{6} = \frac{91}{6}.$$

L'aire moyenne de Yana est :

$$\frac{(1+2+3+4+5+6)^2}{36} = \frac{21^2}{6^2} = \frac{7^2}{2^2} = \frac{49}{4}.$$

Par conséquent, l'aire moyenne de Zahid est plus grande de $\dfrac{182-147}{12} = \boxed{35/12}$ (unités carrées).

b. Tous les résultats possibles pour deux dés sont :

$$\begin{bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{bmatrix}.$$

La seule façon pour eux d'avoir la même aire est si (i) la valeur minimale de Zahid est égale à celle des deux dés lancés par Yana ; ou si (ii) la valeur minimale de Zahid est 2 et Yana obtient un 1 et un 4, dans un certain ordre.

La probabilité que le nombre minimal de Zahid soit 1 est $P_z(1) = 11/36$. De même, $P_z(2) = 9/36, P_z(3) = 7/36, P_z(4) = 5/36, P_z(5) = 3/36, P_z(6) = 1/36$.

En général, la probabilité que le nombre minimal de Zahid soit n est $P_z(n) = \frac{13-2n}{36}$.

La probabilité que Yana obtienne le même nombre spécifique sur les deux dés est de $1/36$. La probabilité d'obtenir soit $(1,4)$, soit $(4,1)$ est de $2/36$.

 © 2022 Société mathématique du Canada

La probabilité totale est $\frac{1}{36} \times (P_z(1) + \cdots + P_z(6)) + \frac{2}{36} \times P_z(2) = \frac{1}{36} + \frac{1}{72} = \boxed{1/24}$.

c. Comme calculé dans la partie (a), l'espérance de l'aire de Yana est de $\frac{49}{4}$. D'après la partie (b),la probabilité que le nombre minimal de Zahid soit n est de $\frac{13-2n}{36}$ pour $n = 1, 2, \ldots, 6$, et dans ces cas, son aire est n^2. Ainsi, l'espérance de l'aire de Zahid est

$$\sum_{n=1}^{6} \frac{13-2n}{36}(n^2) = \frac{11}{36} + \frac{36}{36} + \frac{63}{36} + \frac{80}{36} + \frac{75}{36} + \frac{36}{36} = \frac{301}{36}.$$

L'espérance de la différence des aires est la différence des espérances, soit

$$\frac{49}{4} - \frac{301}{36} = \frac{140}{36} = \frac{35}{9}.$$

Réponse : $\boxed{35/9}$.

C4. Un récipient entier (x, y, z) est un prisme rectangulaire dont les longueurs des côtés sont des entiers positifs x, y et z, où $x \leq y \leq z$. Un bâton vérifie $x = y = 1$; une plaque vérifie $x = 1$ et $y > 1$; et une boîte vérifie $x > 1$. Il y a 5 récipients entiers de volume 30 : un bâton $(1,\ 1,\ 30)$, trois plaques $(1,\ 2,\ 15)$, $(1,\ 3,\ 10)$ et $(1,\ 5,\ 6)$ ainsi qu'une boîte $(2,\ 3,\ 5)$.

a. Combien de bâtons, de plaques et de boîtes y a-t-il parmi les récipients entiers de volume 36 ?

b. Combien de plaques et de boîtes y a-t-il parmi les récipients entiers de volume 210 ?

c. Supposons que $n = p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$ possède k facteurs premiers distincts $p_1, p_2, \ldots p_k$, chacun ayant un exposant entier $e_1 \geq 1, e_2 \geq 1, \ldots e_k \geq 1$ et $k \geq 3$. Combien de boîtes y a-t-il parmi les récipients entiers de volume n ? Exprimez votre réponse en termes de $e_1, e_2, \ldots, e_k$. Combien de boîtes de volume $n = 8!$ y a-t-il ?

Solution : Il y a toujours un bâton pour chaque volume. Pour compter les plaques de volume n, on veut des paires (y, z) avec $1 < y \leq z$ et $yz = n$, de sorte qu'on puisse compter les diviseurs de n et écarter la paire $(1, n)$. Autrement dit, si $d(n)$ désigne le nombre de diviseurs de n, le nombre de plaques est $(d(n) - 2)/2$ si n n'est pas un carré parfait et $(d(n) - 1)/2$ si n est un carré parfait.

a. Il y a un bâton $(1, 1, 36)$ de volume 36 et, suivant l'argument du comptage des diviseurs, quatre plaques puisque $d(36) = 9$. Ou, plus explicitement, les plaques sont $(1, 2, 18)$, $(1, 3, 12)$, $(1, 4, 9)$ et $(1, 6, 6)$.

Pour compter les boîtes, on peut directement les trouver en considérant tous les cas : $(2, 2, 9), (2, 3, 6), (3, 3, 4)$.

Sinon, pour chaque boîte, on peut répartir les nombres premiers $2, 2, 3, 3$ sur trois côtés, de sorte que chaque côté reçoive au moins un facteur premier. Dans ce cas, il doit y avoir un côté qui est un produit de deux nombres premiers (peut-être pas distincts) et il y a trois façons de le faire.

Réponse : $\boxed{1, 4, 3}$.

b. On a $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, de sorte que $d(210) = 2^4$. Il y a donc $\boxed{7}$ plaques. Pour compter les boîtes, on remarque qu'une longueur de côté doit être un produit de deux nombres premiers, tandis que les deux autres sont premiers. Il y a $\binom{4}{2} = 6$ façons de choisir deux des quatre. Il y a donc $\boxed{6}$ boîtes. Plus explicitement, les boîtes sont
$(2, 3, 35), (2, 5, 21), (2, 7, 15), (3, 5, 14), (3, 7, 10), (5, 6, 7)$.

c. On compte d'abord le nombre de récipients de volume n, C_n, puis le nombre de plaques, F_n. On désire alors que $C_n - F_n - 1$, car il n'y a qu'un seul bâton de volume n.
Il y a trois types de récipients : ceux dont aucune dimension n'est égale, ceux dont deux dimensions sont égales et ceux dont les trois dimensions sont égales. On appelle le nombre de ces récipients $C_{1,n}$, $C_{2,n}$ et $C_{3,n}$, respectivement. Notez que $C_{3,n} = 1$ lorsque tous les e_i sont des multiples de 3 et $C_{3,n} = 0$ sinon.
Pour compter $C_{2,n}$, on commence par compter le nombre de triplets (x, y, z) d'entiers positifs avec $xyz = n$ et $x = y$. On voit qu'il y a $\lfloor \frac{e_i}{2} \rfloor + 1$ façons de choisir le nombre de facteurs de p_i dans chacune des trois dimensions (nous pouvons choisir la puissance de p_i dans x comme $0, 1, \ldots, \lfloor e_i/2 \rfloor$). Chacun de ces triplets correspond à exactement un récipient, il y a donc :

$$C_{2,n} + C_{3,n} = \prod_{i=1}^{k} \left(\left\lfloor \frac{e_i}{2} \right\rfloor + 1 \right)$$

récipients où au moins deux dimensions sont égales.
Enfin, pour compter $C_{1,n}$, on compte d'abord le nombre de triplets (x, y, z) d'entiers positifs avec $xyz = n$. Pour chaque p_i, il existe $\binom{e_i+2}{2}$ façons de répartir ses diviseurs entre x, y et z. Ici, chaque élément de $C_{1,n}$ est compté six fois, chaque élément de $C_{2,n}$ est compté trois fois et chaque élément de $C_{3,n}$ est compté une fois, d'où

$$6C_{1,n} + 3C_{2,n} + C_{3,n} = \prod_{i=1}^{k} \binom{e_i + 2}{2}.$$

En combinant tout cela (en additionnant la dernière équation avec trois fois la première), on a

$$C_n = C_{1,n} + C_{2,n} + C_{3,n} = \frac{1}{6} \left(\prod_{i=1}^{k} \binom{e_i + 2}{2} + 3 \prod_{i=1}^{k} \left(\left\lfloor \frac{e_i}{2} \right\rfloor + 1 \right) + \begin{cases} 2 & \text{si } 3|e_i \text{ pour tout } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \right)$$

Traitons maintenant les plaques. Pour chaque paire non ordonnée de diviseurs de n, $(k, n/k)$, il existe une plaque de dimensions $1, k, n/k$ dans un certain ordre, à condition que $k \neq 1, n$. Le nombre de telles paires non ordonnées est

$$F_n = \frac{1}{2} \left(\prod_{i=1}^{k} (e_i + 1) - 2 + \begin{cases} 1 & \text{si } 2|e_i \text{ pour tout } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \right).$$

On se concentre maintenant sur le cas $n = 8! = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.
On voit que

 © 2022 Société mathématique du Canada

$$C_n = \frac{1}{6}\left(\binom{9}{2}\binom{4}{2}\binom{3}{2}\binom{3}{2} + 3\cdot 4\cdot 2\right) = 328,$$

and

$$F_n = \frac{1}{2}(8\cdot 3\cdot 2\cdot 2 - 2) = 47,$$

ainsi, le nombre de boîtes est

$$C_n - F_n - 1 = 280.$$